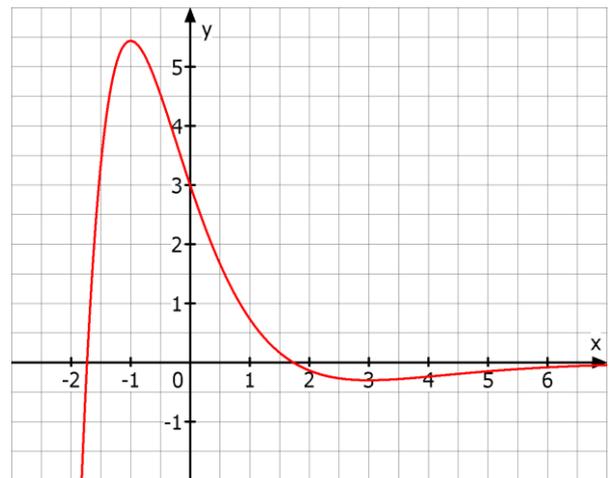


Q12 * Mathematik * Aufgaben zur Vorbereitung auf die Abiturprüfung (2)

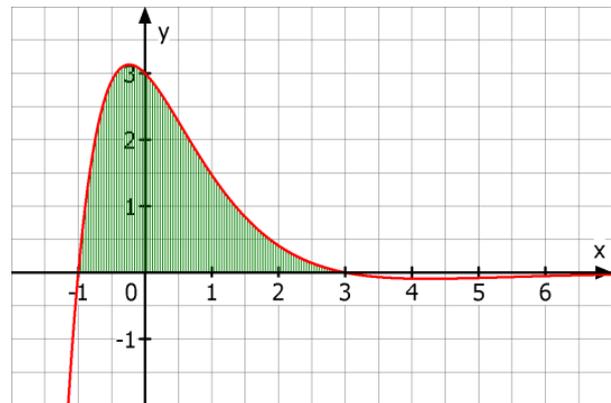
1. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = (3 - x^2) \cdot e^{-x}$

- Berechnen Sie die Koordinaten des Hoch- und des Tiefpunktes.
- Bestimmen Sie alle Stellen, an denen der Graph von f sein Krümmungsverhalten ändert. Tragen Sie die Wendepunkte in das Bild ein.
- Bestimmen Sie den Wert des uneigentlichen Integrals $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x (3 - t^2) \cdot e^{-t} dt$. Interpretieren Sie das Ergebnis.



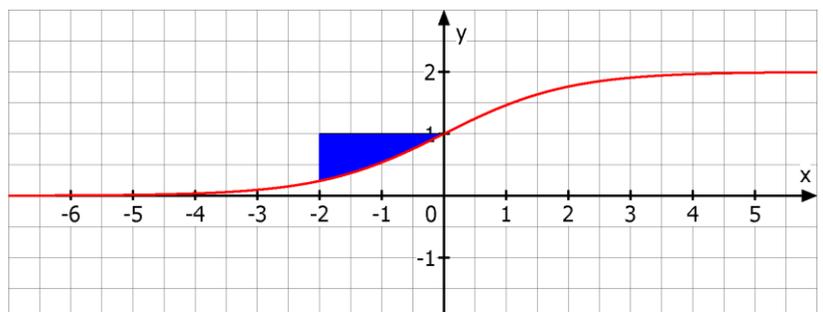
2. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = (3 + 2x - x^2) \cdot e^{-x}$.

- Bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion.
- Bestimmen Sie das Verhalten von $f(x)$ für $x \rightarrow \pm \infty$.
- Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte des Graphen von f .
- Der Graph schließt mit der x -Achse das schraffierte Flächenstück ein. Berechnen Sie den Inhalt dieses Flächenstücks.
- Der Graph schließt mit der positiven x -Achse eine sich ins Unendliche erstreckende Fläche ein. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche.



3. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1}$.

- Bestimmen Sie das Verhalten von $f(x)$ für $x \rightarrow \pm \infty$.
- Begründen Sie, dass f streng monoton steigend ist.
- Zeigen Sie, dass der Graph von f punktsymmetrisch zu $(0/1)$ ist.
- Berechnen Sie den Inhalt der blau gefärbten Fläche.



Q12 * Mathematik * Aufgaben zur Vorbereitung auf die Abiturprüfung (2) * Lösungen

1. a) $f(x) = (3-x^2) \cdot e^{-x} \Rightarrow f'(x) = (x^2 - 2x - 3) \cdot e^{-x} = (x+1) \cdot (x-3) \cdot e^{-x}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1) \cdot (x-3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1 \text{ und } x_2 = 3$$

Anhand der Vorzeichenwechsel von $f'(x)$ an den Stellen x_1 und x_2 erkennt man

$$\text{HOP}(-1/2e) \approx (-1/5, 4) \text{ und } \text{TIP}(3/-6e^{-3}) \approx (3/-0, 3).$$

b) $f''(x) = (-x^2 + 4x + 1) \cdot e^{-x}$; $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$x_3 = 2 - \sqrt{5} \approx -0,2; x_4 = 2 + \sqrt{5} \approx 4,2$$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x (3-t^2) \cdot e^{-t} dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[(t^2 + 2t - 1) \cdot e^{-t} \right]_0^x = 0 - (-1) \cdot e^0 = 1$

Die Stammfunktion F von f findet man mit dem Probeansatz $F(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^{-x}$.

$$F'(x) = (-ax^2 + (2a-b)x + (b-c)) \cdot e^{-x} \stackrel{!}{=} f(x) = (-x^2 + 3) \cdot e^{-x} \Leftrightarrow a=1 \text{ und } b=2 \text{ und } c=-1.$$

Interpretation: Die von der positiven x -Achse, der positiven y -Achse und dem Graphen eingeschlossene Fläche ist um 1 größer als die sich ins Unendliche erstreckende Fläche zwischen der positiven x -Achse und dem Graphen von f .



2. a) NSt.: $f(x) = (3 + 2x - x^2) \cdot e^{-x} = 0 \Leftrightarrow 3 + 2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1 \text{ und } x_2 = 3$.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3 + 2x - x^2)}{e^x} = 0$ (Merkhilfe!)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x} - 1 \right) \cdot e^{-x} = \infty \cdot (-1) \cdot e^\infty = -\infty$$

c) $f'(x) = (x^2 - 4x - 1) \cdot e^{-x}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 2 - \sqrt{5}$; $x_4 = 2 + \sqrt{5}$.

Anhand der Vorzeichenwechsel von $f'(x)$ an den Stellen x_3 und x_4 erkennt man

$$\text{HOP}(x_3/f(x_3)) \approx (-0,2/3,1) \text{ und } \text{TIP}(x_4/f(x_4)) \approx (4,2/-0,1).$$

d) Die Stammfunktion F von f findet man mit dem Probeansatz $F(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^{-x}$.

$$F'(x) = (-ax^2 + (2a-b)x + (b-c)) \cdot e^{-x} \stackrel{!}{=} f(x) = (-x^2 + 2x + 3) \cdot e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$a=1 \text{ und } b=0 \text{ und } c=-3 \text{ also } F(x) = (x^2 - 3) \cdot e^{-x}.$$

$$A_1 = \int_{-1}^3 (3 + 2x - x^2) \cdot e^{-x} dx = \left[(x^2 - 3) \cdot e^{-x} \right]_{-1}^3 = 6 \cdot e^{-3} - (-2) \cdot e = 2e + 6 \cdot e^{-3} \approx 5,7$$

e) $A_2 = \left| \lim_{x \rightarrow \infty} \int_3^x (3 + 2t - t^2) \cdot e^{-t} dt \right| = \left| \lim_{x \rightarrow \infty} \left[(t^2 - 3) \cdot e^{-t} \right]_3^x \right| = \left| 0 - 6 \cdot e^{-3} \right| = 6 \cdot e^{-3} \approx 0,3$

3. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{2}{1+0} = 2$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x}{e^x + 1} = \frac{0}{0+1} = 0$

b) $f'(x) = \frac{(e^x + 1) \cdot e^x - e^x \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also ist f streng mon. stg.

c) Für die geforderte Punktsymmetrie zu $(0/1)$ muss gelten: $f(x) - 1 = 1 - f(-x)$ (für $x \geq 0$).

$$f(x) - 1 = \frac{2e^x}{e^x + 1} - 1 = \frac{2e^x - e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \text{ und}$$

$$1 - f(-x) = 1 - \frac{2e^{-x}}{e^{-x} + 1} = 1 - \frac{2}{1 + e^x} = \frac{1 + e^x - 2}{1 + e^x} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

d) $A = \int_{-2}^0 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1} dx = \left[x - 2 \cdot \ln(e^x + 1) \right]_{-2}^0 = -2 \ln(2) - (-2 - 2 \cdot \ln(e^{-2} + 1)) =$

$$2 + 2 \cdot \ln \frac{e^{-2} + 1}{2} \approx 0,87$$