Q12 * Mathematik * Aufgaben zur Vorbereitung auf die Abiturprüfung
Erstellen von Funktionstermen

1. Geben Sie den Term einer gebrochen rationalen Funktion an die folgende Eigenschaften hat.
   a) Die Funktion hat bei $x_1 = 3$ einen Pol zweiter Ordnung.
   b) Die Funktion hat bei $x_1 = 3$ einen Pol zweiter Ordnung und den Wertebereich $]-\infty; 1]$.
   c) Die Funktion hat die schräg liegende Asymptote $y = 0{,}5x - 2$.
   d) Die Funktion hat die schräg liegende Asymptote $y = 0{,}5x - 2$ und einen Pol 1. Ordnung bei $x_1 = -2$.
   e) Die Funktion hat bei $x_1 = -1$ und bei $x_2 = 2$ senkrechte Asymptoten.
   f) Die Funktion hat bei $x_1 = 1$ und bei $x_2 = -2$ senkrechte Asymptoten und die waagrechte Asymptote $y = 0{,}5$.
   g) Die Funktion hat bei $x_1 = 1$ und bei $x_2 = -2$ senkrechte Asymptoten und die schräg liegende Asymptote $y = 0{,}5x + 1$.
   h) Für die Funktion f gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_0^x f(t)\,dt = -2$.

2. Geben Sie jeweils den Term einer in R definierten Funktion an, die die folgende Eigenschaft hat.
   a) Die Funktion ist streng monoton fallend und hat keine Nullstelle.
   b) Die Funktion ist an der Stelle $x_1 = 2$ stetig aber nicht differenzierbar.
   c) Die Funktion hat den Tiefpunkt $(1 / -2)$.
   d) Die Funktion hat bei $x_1 = -1$ einen Hoch- und bei $x_2 = 3$ einen Tiefpunkt.
   e) Die Funktion hat den Wertebereich $W =]\,0\,;\,2\,]$.
   f) Die Funktion ist achsensymmetrisch zur Achse $x = 2$.
   g) Die Funktion ist punktsymmetrisch zum Punkt $(2 / 1)$.
   h) Die Funktion ist an der Stelle $x_1 = 5$ nicht stetig.
   i) Die Funktion hat bei $x_1 = -2$ und bei $x_2 = 3$ Nullstellen und $(1 / 3)$ gehört zum Graph von f.
   j) Für die Funktion f gilt $\int\limits_0^2 f(x)\,dx = 0$ und $\int\limits_0^2 |f(x)|\,dx = 4$.
   k) Für die Funktion f gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_0^x f(t)\,dt = 0$.

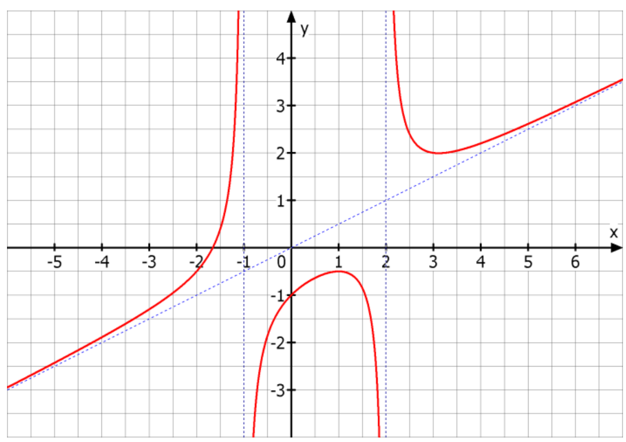
3. Wählen Sie zum abgebildeten Graphen den passenden Funktionsterm aus. Begründen Sie!

$$f_1(x) = 0{,}5x - \frac{1}{(x+1)\cdot(x-2)}$$

$$f_2(x) = 0{,}5x + \frac{2}{(x-1)\cdot(x+2)}$$

$$f_3(x) = 0{,}5x + \frac{1}{(x+1)\cdot(x-2)}$$

$$f_4(x) = \frac{2}{(x+1)\cdot(x-2)} - 0{,}5x$$



Q12 * Mathematematik * Aufgaben zur Vorbereitung auf die Abiturprüfung
Erstellen von Funktionstermen

1. a) $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$ b) $f(x) = 1 - \frac{x^2}{(x-3)^2} = \frac{9-6x}{(x-3)^2}$

   c) $f(x) = 0{,}5x - 2 + \frac{1}{x} = \frac{x^2-4x+1}{2x}$ d) $f(x) = 0{,}5x - 2 + \frac{1}{x+2} = \frac{0{,}5x^2 - x - 3}{x+2}$

   e) $f(x) = \frac{1}{(x+1)\cdot(x-2)} = \frac{1}{x^2 - x - 2}$ f) $f(x) = \frac{0{,}5x^2}{(x+1)\cdot(x-2)} = \frac{0{,}5x^2}{x^2-x-2}$

   g) $f(x) = 0{,}5x + 1 + \frac{1}{(x+1)\cdot(x-2)} = \frac{0{,}5x^3 + 0{,}5x^2 - 2x - 1}{x^2 - x - 2}$

   h) 1. Probeansatz: $\int_0^x \frac{a}{(t+1)^2}\,dt = \left[\frac{-a}{t+1}\right]_0^x = \frac{-a}{x+1} + \frac{a}{1} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{a}{(t+1)^2}\,dt = a$

   Wähle für $-2 = \lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{a}{(t+1)^2}\,dt = a$ also $a = -2$, d.h. $f(x) = \frac{-2}{(x+1)^2}$

   oder 2. Probeansatz: $\int_0^x a\cdot e^{-t}\,dt = \left[-a\cdot e^{-t}\right]_0^x = -a\cdot e^{-x} + a \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\int_0^x a\cdot e^{-t}\,dt = a$

   also eignet sich auch $f(x) = -2\cdot e^{-x}$

2. a) $f(x) = e^{-x}$ b) $f(x) = |x-2|$ c) $f(x) = (x-1)^2 - 2$

   d) $f'(x) = a\cdot(x+1)\cdot(x-3) = a\cdot(x^2 - 2x - 3)$, also hat f Extremwerte bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$

   es gilt $f(x) = a\cdot(\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + c)$ und für $a > 0$ liegt der HOP bei x_1

   also z.B. $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$

   e) $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$ f) $f(x) = (x-2)^2$

   g) $f(x) = x - 1$ oder $f(x) = (x-2)^3 + 1$ h) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, für } x \geq 5 \\ 0 & \text{, für } x < 5 \end{cases}$

   i) $f(x) = a\cdot(x+2)\cdot(x-3)$ und $3 = f(1) = a\cdot 3\cdot(-2) = -6 \Rightarrow a = -0{,}5$ und
   $f(x) = -0{,}5\cdot(x+2)\cdot(x-3)$

   j) $f(x) = a\cdot(x-1)$ mit $\frac{1}{2}\cdot(2-1)\cdot f(2) = 2 \Leftrightarrow a = 4$ also $f(x) = 4\cdot(x-1)$

   k) $\lim_{x\to\infty}\int_0^x f(t)\,dt = 0$ wegen $\int_0^x f(t)\,dt = F(x) - F(0)$ sollte "$F(\infty)$" $= F(0)$ gelten

   Für $F(x) = x\cdot e^{-x}$ gilt $F(0) = 0 = \lim_{x\to\infty} F(x)$ also $f(x) = F'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$ passt.

3. $f_1(0) = 0 - \frac{1}{-2} = +0{,}5 \neq -1$, also passt $f_1(x)$ nicht.

   Der Graph von f_2 hat die Polstellen bei $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$, passt also auch nicht.

   $f_3(0) = 0 + \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \neq -1$, also passt $f_1(x)$ nicht.

   Bei f_4 stimmen beide senkrechte und die schräg liegende Assymptote und $f(0) = -1$.