Q12 * Mathematik * Extremwertaufgaben

1. Gegeben ist die Kurvenschar f_k mit $f_k(x) = \dfrac{x}{k + x^2}$ mit $k > 0$.

   a) Bestimmen Sie alle Hochpunkte der Kurvenschar in Abhängigkeit von k.
   Auf welcher Kurve liegen diese Hochpunkte?

   b) Bestimmen Sie den Hochpunkt der Kurvenschar, der vom Ursprung aus den kleinsten Abstand besitzt.

2. Eine zylindrische Dose aus Metall soll mit möglichst geringem Materialaufwand hergestellt werden.
   Bestimmen Sie r und h in Abhängigkeit von A, wenn der Oberflächeninhalt A fest vorgegeben ist?
   In welchem Verhältnis müssen dabei Radius r und Höhe h zueinander stehen?

3. Eine zylindrische Dose (Masse m_D) kann vollständig mit einer Flüssigkeit (Masse m_F) gefüllt werden.

   a) In welcher Höhe befindet sich der Schwerpunkt der Dose, wenn diese leer bzw. vollständig gefüllt ist?

   b) Nun gelte $m_F = 8m_D$.
   Welchen Bruchteil der Flüssigkeit muss man aus der Dose entnehmen, damit der Schwerpunkt möglichst tief liegt?

4. Aus einem zylindrischen Baumstamm (Radius r, Länge l) soll ein quaderförmiger Balken (Breite b, Höhe h und Länge l) so herausgeschnitten werden, dass

   a) das Volumen des Balken

   b) die Tragfähigkeit des Balken

   möglichst groß ist.
   Die Tragfähigkeit eines Balken ist dabei proportional zu bh^2.

   Bestimmen Sie das Verhältnis $b : h$!

5. Gefährliche Annäherung?

   Exakt zum Zeitpunkt 16:00 Uhr haben zwei Flugzeuge A und B voneinander den Abstand 5,0 km. A bewegt sich zu diesem Zeitpunkt mit 900 km/h genau auf B zu, während B sich zu diesem Zeitpunkt mit der Geschwindigkeit 200 km/h unter einem Winkel von 60^o zur Verbindungslinie AB bewegt. Beide Flugzeuge fliegen mit konstanter Geschwindigkeit und ändern ihre anfängliche Richtung nicht.
   Wie nahe kommen sich die beiden Flugzeuge?
   Bestimmen Sie auch den zugehörigen Zeitpunkt.
   (Hinweis: Fertigen Sie zuerst eine Skizze in einem geeigneten Koordinatensystem an!)

Q12 * Mathematik * Extremwertaufgaben * Lösungen

1.a) $f_k(x) = \dfrac{x}{k + x^2}$ mit $k > 0$; $f_k{}'(x) = \dfrac{k - x^2}{(k + x^2)^2}$

$f_k{}'(x) = 0 \Leftrightarrow k - x^2 = 0$; $x_{1/2} = \sqrt{k}$; $HOP(\sqrt{k} \,/\, \dfrac{\sqrt{k}}{2k})$

Kurve der Hochpunkte: $h(x) = \dfrac{1}{2x}$ mit $x \in D_h = R^+$

b) $d(k) = \sqrt{\sqrt{k}^{\,2} + (\dfrac{\sqrt{k}}{2k})^2} = \sqrt{k + \dfrac{1}{2k}}$; $d'(k) = \dfrac{1 - \dfrac{1}{2k^2}}{2 \cdot \sqrt{k + \dfrac{1}{2k}}}$

$d'(k) = 0 \Leftrightarrow 1 = \dfrac{1}{2k^2} \Leftrightarrow k_{min} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ und $d_{min} = d(k_{min}) = \sqrt[4]{2}$

2. $V = r^2 \cdot \pi \cdot h$ und $A = 2\pi r \cdot (r + h)$ und $A = A_o$ fest vorgegeben

$h = \dfrac{A}{2\pi r} - r$ und $V = V(r) = r^2 \pi \cdot (\dfrac{A}{2\pi r} - r) = \dfrac{A \cdot r}{2} - r^3 \pi$ und $V'(r) = \dfrac{A}{2} - 3r^2 \pi$

$V'(r) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{A}{2} = 3r^2\pi \Leftrightarrow r = \sqrt{\dfrac{A}{6\pi}}$ und $\dfrac{h}{r} = \dfrac{\dfrac{A}{2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{A}{6\pi}}} - \sqrt{\dfrac{A}{6\pi}}}{\sqrt{\dfrac{A}{6\pi}}} = \dfrac{\dfrac{A}{2\pi} - \dfrac{A}{6\pi}}{\dfrac{A}{6\pi}} = \dfrac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6}}{\dfrac{1}{6}} = \dfrac{2}{1}$

3.a) Höhe h der Dose; Höhe h_S des Schwerpunkts: $h_S = \dfrac{1}{2} h$

b) Höhe des Schwerpunkts der Dose: $h_{DS} = \dfrac{1}{2} h$

Höhe x der Flüssigkeit in der Dose, Höhe des Schwerpunkts der Flüssigkeit: $h_{FS} = \dfrac{1}{2} x$

Höhe h_S des Schwerpunkts gesamt:

$(h_S - h_{FS}) \cdot m_F(h_S) = (h_{DS} - h_S) \cdot m_D$ und $m_F(h_S) = m_F \cdot \dfrac{x}{h}$

$(h_S - \dfrac{1}{2} x) \cdot m_F \cdot \dfrac{x}{h} = (\dfrac{1}{2} h - h_S) \cdot m_D \Rightarrow h_S = h_S(x) = \dfrac{m_D \cdot h^2 + m_F \cdot x^2}{2m_F \cdot x + 2m_D \cdot h}$

$h_S{}'(x) = \dfrac{2m_F \cdot x \cdot (2m_F \cdot x + 2m_D \cdot h) - 2m_F \cdot (m_D \cdot h^2 + m_F \cdot x^2)}{(2m_F \cdot x + 2m_D \cdot h)^2} =$

$\dfrac{2m_F{}^2 \cdot x^2 + 4m_F m_D \cdot h \cdot x - 2m_F m_D \cdot h^2}{(2m_F \cdot x + 2m_D \cdot h)^2}$

$h_S{}'(x) = 0 \Leftrightarrow m_F \cdot x^2 + 2m_D \cdot h \cdot x - m_D \cdot h^2 = 0 \Leftrightarrow$

$x_{1/2} = \dfrac{1}{2m_F}(-2m_D \cdot h \pm \sqrt{4m_D{}^2 \cdot h^2 + 4m_F \cdot m_D \cdot h^2})$

$$x_{1/2} = -\frac{m_D \cdot h \pm \sqrt{m_D{}^2 + m_F \cdot m_D} \cdot h}{m_F} \quad \text{und} \quad x_{min} = \frac{(-m_D + \sqrt{m_D{}^2 + m_F \cdot m_D}) \cdot h}{m_F}$$

$$x_{min} = \frac{(-m_D + \sqrt{m_D{}^2 + 8 \cdot m_D{}^2}) \cdot h}{8 m_D} = \frac{(-m_D + 3m_D) \cdot h}{8 m_D} = \frac{h}{4}$$

4. $V_{Balken} = A \cdot \ell$, aber es kommt nur auf A_{Balken} an.

a) V ist maximal, falls A maximal ist.

$A = b \cdot h$ und $b^2 + h^2 = (2r)^2 \;\Rightarrow\; h = \sqrt{4r^2 - b^2}$ und $A = A(b) = b \cdot \sqrt{4r^2 - b^2}$

$$A'(b) = \sqrt{4r^2 - b^2} + b \cdot \frac{-2b}{2 \cdot \sqrt{4r^2 - b^2}} = \frac{4r^2 - b^2 - b^2}{\sqrt{4r^2 - b^2}} = \frac{4r^2 - 2b^2}{\sqrt{4r^2 - b^2}}$$

$A'(b) = 0 \;\Leftrightarrow\; 4r^2 = 2b^2 \;\Leftrightarrow\; b = \sqrt{2} \cdot r$ und $h = \sqrt{4r^2 - 2r^2} = \sqrt{2} \cdot r$ also $\frac{b}{h} = \frac{1}{1}$

b) $T = b \cdot h^2$ soll maximal werden. Weiterhin gilt $h = \sqrt{4r^2 - b^2}$ (siehe a!)

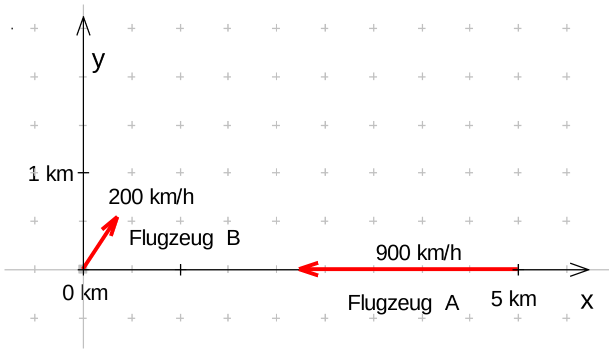
$T = T(b) = b \cdot (4r^2 - b^2) = 4br^2 - b^3$; $T'(b) = 4r^2 - 3b^2$ und

$T'(b) = 0 \;\Leftrightarrow\; 4r^2 = 3b^2 \;\Leftrightarrow\; b = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} r$ und $h = \sqrt{4r^2 - \frac{4}{3} r^2} = \sqrt{\frac{12-4}{3} r^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{6}}{3} r$

also $\frac{b}{h} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

5. t = 0 zum Zeitpunkt 16:00 Uhr.
Koordinaten von Flugzeug A:
$A(5km - v_A \cdot t \;/\; 0)$
Koordinaten von Flugzeug B:
$B(v_B \cdot \cos(60^o) \cdot t \;/\; v_B \cdot \sin(60^o) \cdot t)$

$B(v_B \cdot \frac{1}{2} \cdot t \;/\; v_B \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t)$



Für den Abstand d der beiden Flugzeuge gilt nach Pythagoras:

$$d^2 = (5km - 900\frac{km}{h} \cdot t - 100\frac{km}{h} \cdot t)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 200\frac{km}{h} \cdot t)^2$$

$d^2(t) = 25km^2 - 10000\frac{km^2}{h} \cdot t + 1030000\frac{km^2}{h^2} \cdot t^2$ Da d genau dann minimal ist, wenn d^2 minimal ist, bildet man die Ableitung von $d^2(t)$ nach der Zeit!

$$(d^2)'(t) = -10000\frac{km^2}{h} + 2060000\frac{km^2}{h^2} \cdot t \overset{!}{=} 0 \;\Leftrightarrow\; t = \frac{1}{206} h \approx 17{,}5 s$$

Der minimale Abstand der beiden Flugzeuge um 16:00:17,5 Uhr beträgt $d_{min} =$ $d(\frac{1}{206} h) = \sqrt{0{,}728...km^2} \approx 0{,}853 km$.