Q12 * Mathematik * Aufgaben zur HNF von Ebenen

1. Geben Sie die Ebene $E: \ \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ in der HNF an.
   Welchen Abstand hat der Punkt P(1/-2/5) von dieser Ebene?

2. Gesucht ist der Abstand des Punktes P(7/4/-1) von der Ebene E: $x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 7 = 0$.
   Bestimmen Sie auch den Fußpunkt des Lotes von P auf die Ebene E.

3. Gegeben ist die Ebene $E: 2x_1 + x_2 - x_3 - 5 = 0$
   Geben Sie alle Ebenen an, die zur Ebene E parallel liegen und von E den Abstand 4 haben.
   Fertigen Sie auch eine saubere, übersichtliche Zeichnung an.

4. a) Zeigen Sie, dass die Punkte A(1/2/4), B(-1/2/9) und C(3/-1/5) eine Ebene E festlegen.
   b) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P(1,5/5,5/7) von dieser Ebene E und ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes P*, der bei Spiegelung von P an E entsteht.
   c) Geben Sie Gleichungen der Ebenen E_1 und E_2 an, die parallel zu E im Abstand $\sqrt{5}$ liegen.

5. Gegeben sind A(0/0/1), B(2/-1/3) und E: $3x_1 + x_3 = 2$.
   a) Prüfen Sie die Lage von A und B relativ zu E.
   b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S von AB mit E.
   c) Bestimmen Sie eine Ebene F mit folgender Eigenschaft:
   $A \in F$ und $B \in F$ und $E \cap F = h$ mit $h \perp AB$.
   Fertigen Sie auch eine saubere, übersichtliche Zeichnung an!

6. Finden Sie die Gleichung der Ebene F, für deren Punkte gilt, dass sie von E_1 doppelt so weit entfernt sind wie von E_2, wobei gilt $E_1 : x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4 = 0$ und $E_2 : \ 4x_1 - \ 3x_3 - 2 = 0$.
   Veranschaulichen Sie mit einer Zeichnung!

7. Schnittwinkel von Gerade h mit Ebene E
   Schneiden sich h und E in einem Punkt S und ist p die senkrechte Projektion von h auf E, so nennt man den Schnittwinkel von h und p auch den Schnittwinkel von h und E.
   Fertigen Sie eine saubere Zeichnung an und zeigen Sie, dass nun für den Schnittwinkel φ gilt:
   $\sin\varphi = \left| \frac{\vec{n}_E \circ \vec{r}_h}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{r}_h|} \right|$ wobei $\vec{r}_h$ ein Richtungsvektor von h ist.
   Bestimmen Sie den Schnittwinkel von E: $2x_1 + x_2 - x_3 - 12 = 0$ mit g = AB und A(1/-2/0) B(3/1/-5).

8. Als Schnittwinkel zweier Ebenen E und F legt man den Schnittwinkel der zugehörigen Normalenvektoren $\vec{n}_E$ und $\vec{n}_F$ fest. Veranschaulichen Sie diese Festlegung mit einer geeigneten Zeichnung. Berechnen Sie den Schnittwinkel der beiden Ebenen E: $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4 = 0$ und F: $2x_1 + x_2 - x_3 - 2 = 0$.

Q12 * Mathematik m1 * Aufgaben zur HNF von Ebene * Lösungen

1. $\vec{n}_E = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\-3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-7\\-5\end{pmatrix}$ $\quad E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix}3\\7\\5\end{pmatrix} = 0 \;;\quad E: \; 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 - 53 = 0$

$E_{HNF}: \; \frac{1}{\sqrt{83}} \cdot (3x_1 + 7x_2 + 5x_3 - 53) = 0 \;;\quad P(1/-2/5) \quad d(P;E) = \frac{1}{\sqrt{83}} \cdot (3 - 14 + 25 - 53)$

$d(P;E) = -\frac{39}{\sqrt{83}} = -\frac{39}{83}\sqrt{83} \approx -4{,}28$ $\quad$ P liegt im gleichen Halbraum wie der Ursprung.

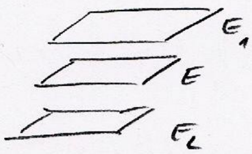
2. $E_{HNF}: \; \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot (-x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 7) = 0 \;;\quad P(7/4/-1) \;;\quad d(P;E) = \frac{1}{\sqrt{14}}(-7 - 12 - 2 - 7) = -2\sqrt{14}$

$\vec{F} = \vec{P} + 2\sqrt{14} \cdot \begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} = \begin{pmatrix}7\\4\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\-6\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-2\\3\end{pmatrix}$ $\quad F(5/-2/3)$ $\quad$ oder

$g: \; \vec{x} = \vec{P} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ und $\{F\} = g \cap E$ also $1 \cdot (7 + r) + 3 \cdot (4 + 3r) - 2 \cdot (-1 - 2r) + 7 = 0 \Leftrightarrow$

$28 + 14r = 0 \Leftrightarrow r = -2$ und $\vec{F} = \vec{P} - 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-2\\3\end{pmatrix}$

3. $E_{HNF}: \; \frac{1}{\sqrt{6}}(2x_1 + x_2 - x_3 - 5) = 0$



Parallele Ebenen zu E im Abstand 4:

$E_1: \; \frac{1}{\sqrt{6}}(2x_1 + x_2 - x_3 - 5) - 4 = 0$

$E_2: \; \frac{1}{\sqrt{6}}(2x_1 + x_2 - x_3 - 5) + 4 = 0$

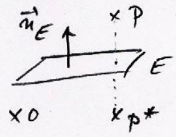
4. a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix}-2\\0\\5\end{pmatrix}, \; \vec{AC} = \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ sind linear unabhängig $\Rightarrow$ A, B, C spannen Ebene E auf.

$\begin{pmatrix}-2\\0\\5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\12\\6\end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix} \;;\quad \vec{n}_E = \begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix} \;;\quad E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix} = 0$

$E: \; 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 21 = 0$

b) $E_{HNF}: \; \frac{1}{3\sqrt{5}}(5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 21) = 0 \quad P(1{,}5/5{,}5/7) \quad d(P;E) = \frac{1}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{45}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$

P und Ursprung liegen in unterschiedlichen Halbräumen,



daher $\vec{P}^* = \vec{P} - 2 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{5} \cdot \begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3\sqrt{5}} = \begin{pmatrix}1{,}5\\5{,}5\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3{,}5\\1{,}5\\5\end{pmatrix}$

$P^*(-3{,}5/1{,}5/5)$

c) $E_1: \; \frac{1}{3\sqrt{5}}(5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 21) + \sqrt{5} = 0 \;;\quad E_1: \; \frac{1}{3\sqrt{5}}(5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 21 + 15) = 0$

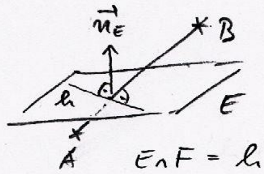
entsprechend $E_2: \; \frac{1}{3\sqrt{5}}(5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 21) - \sqrt{5} = 0 \;;\quad E_2: \; 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 21 - 15 = 0$

5 a) $A \notin E; \; B \notin E; \; d(A;E) = -\frac{1}{10}\sqrt{10} \;;\; d(B;E) = +\frac{7}{10}\sqrt{10}$ $\quad$ A, B liegen in unterschiedl. Halbräumen von E

b) $AB: \; \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} \;;\quad \{S\} = AB \cap E: \quad 3 \cdot (0 + 2r) + 1 \cdot (1 + 2r) - 2 = 0 \Rightarrow 8r = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{8}$

$\vec{S} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{8}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} \;;\quad S\left(\frac{1}{4}/-\frac{1}{8}/\frac{5}{4}\right)$

c) Für den Richtungsvektor $\vec{v}$ von h gilt:



$\vec{v} \perp \vec{n}_E$ und $\vec{v} \perp \vec{AB}$ also $\vec{v} \parallel \vec{n}_E \times \vec{AB}$

$E \cap F = h$ Schnittgerade

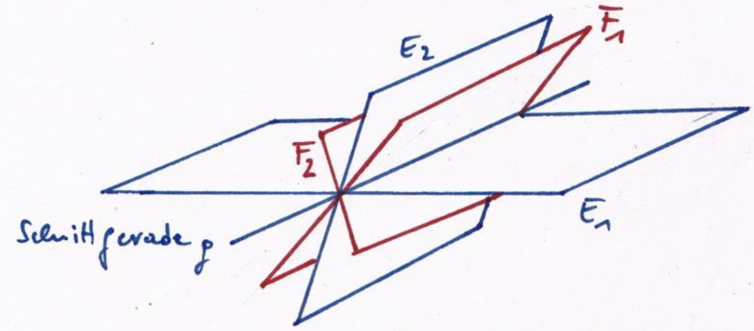
$\vec{n}_E \times \vec{AB} = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-4\\-3\end{pmatrix}$

Ebene F: $\vec{x} = \vec{A} + r \cdot \vec{AB} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\-4\\-3\end{pmatrix}$ in Koordinatenform: $F: \; 11x_1 + 8x_2 - 7x_3 + 7 = 0$

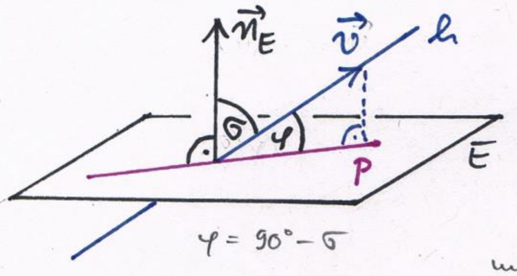
6. $E_{1,HNF}: \frac{1}{3}(x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4) = 0 \qquad E_{2,HNF}: \frac{1}{5}(4x_1 - 3x_3 - 2) = 0$

gesuchte Ebene $F_{1/2}$: $\frac{1}{3}(x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4) = \pm 2 \cdot \frac{1}{5}(4x_1 - 3x_3 - 2)$

$F_1: -19x_1 - 10x_2 + 28x_3 - 8 = 0 \quad ; \quad F_2: 29x_1 - 10x_2 - 8x_3 - 32 = 0$



7.



$\vec{v}$ Richtungsvektor von h

$$\cos\sigma = \left| \frac{\vec{n}_E \circ \vec{v}}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{v}|} \right|$$

$\varphi = 90° - \sigma$

und $\sin\varphi = \cos(90° - \varphi) = \cos\sigma$

also $\sin\varphi = \left| \frac{\vec{n}_E \circ \vec{v}}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{v}|} \right|$

$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \sin\varphi = \frac{4+3+5}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{38}} = \frac{6}{\sqrt{57}} \Rightarrow \varphi \approx 52{,}6°$

8.

$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\cos\varphi = \left| \frac{\vec{n}_E \circ \vec{n}_F}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_F|} \right| =$

$= \left| \frac{2 - 2 - 3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}} \right| = \frac{3}{2\sqrt{21}}$

$\Rightarrow \varphi \approx 70{,}9°$