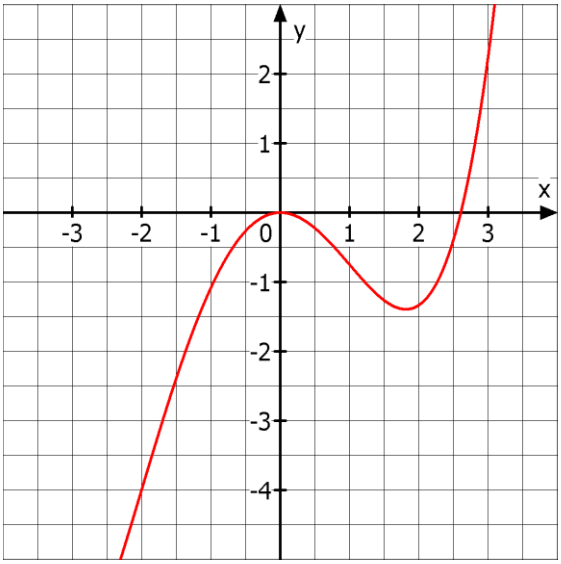
Q12 * Mathematik * Krümmung von Graphen und Wendepunkte

1. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion
   $f(x) = \frac{1}{12} \cdot (x^4 + 2x^3 - 12x^2)$.

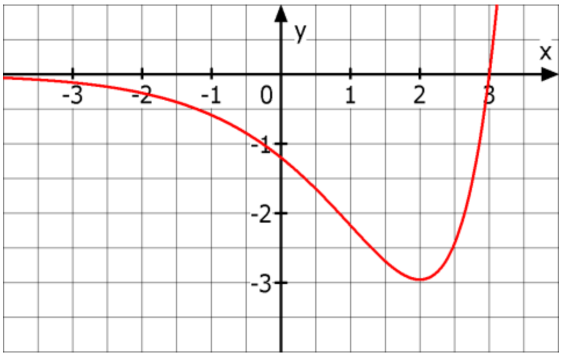


   a) Bestimmen Sie anhand des Bildes möglichst genau die Intervalle, in denen die Funktion f streng monoton steigt und in denen der Graph rechts- bzw. linksgekrümmt ist.

   b) Bei welchem Punkt des Graphen ändert sich das Krümmungsverhalten? Man nennt solche Punkte auch Wendepunkt des Graphen.

   c) Überprüfen Sie Ihre Antworten zu a) und b) durch entsprechende Rechnung!

2. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion
   $f(x) = 0{,}4 \cdot (x-3) \cdot e^x$.

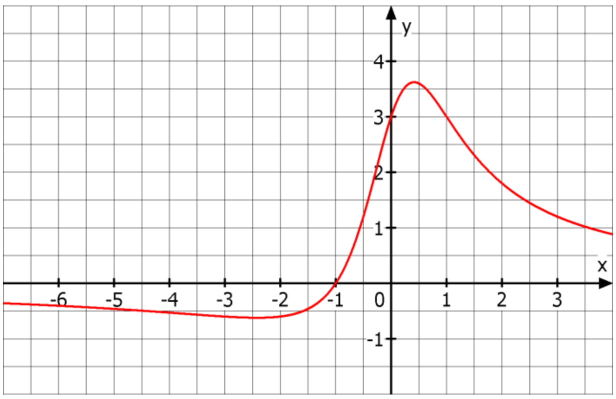


   a) Kennzeichnen Sie möglichst genau die Intervalle, in denen der Graph der Funktion f rechts- bzw. linksgekrümmt ist.
   Tragen Sie den Wendepunkt des Graphen im Bild möglichst genau ein.

   b) Bestätigen Sie Ihre Angaben in a) durch geeignete Rechnung!

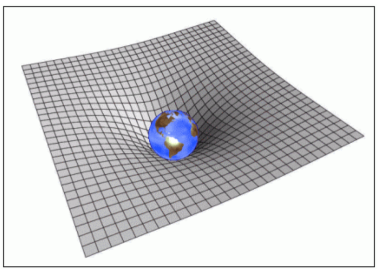
   c) Prüfen Sie, ob das uneigentlichen Integral $\lim\limits_{b \to -\infty} \int_b^3 f(x)\,dx$ existiert.

3. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion
   $f(x) = \frac{3x + 3}{x^2 + 1}$.



   a) Der Graph von f hat ersichtlich einen Hoch- und einen Tiefpunkt.
   Bestimmen Sie diese beiden Punkte mit geeigneter Rechnung.
   Begründen Sie auch, warum es sich um einen Hoch- bzw. Tiefpunkt handelt.

   b) An welchen Stellen vermuten Sie Wendepunkte des Graphen.
   Tragen Sie zunächst die zugehörigen Wendepunkte in das Bild ein und bestimmen Sie anschließend die Stellen mit geeigneter Rechnung.

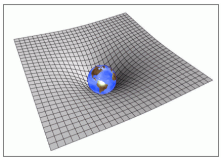


Q12 * Mathematik * Krümmung von Graphen und Wendepunkte * Lösung

1. a) Beachte: Wegen $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ muss G_f für $x < -1$ noch einen Tiefpunkt besitzen!

f steigt streng monoton in [?; 0] und ungefähr in [1,8 ; ∞[
Rechtskrümmung ungefähr in] ? ; 1[und Linkskrümmung in]- ∞ ; ? [und in]1 ; ∞[.

b) Im Punkt P(1 / - 0,75) scheint sich das Krümmungsverhalten zu ändern.



c) $f'(x) = \frac{1}{12} \cdot (4x^3 + 6x^2 - 24x) = \frac{x}{6} \cdot (2x^2 + 3x - 12)$ und

$f''(x) = \frac{1}{12} \cdot (12x^2 + 12x - 24) = x^2 + x - 2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ und $x_{2/3} = \frac{1}{2 \cdot 2} \cdot (-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 2 \cdot 12}) = \frac{-3 \pm \sqrt{105}}{4}$

$x_2 \approx -3{,}31$ und $x_3 \approx 1{,}81$ (x_2 ist im Bild nicht erkennbar!)

f ist streng monoton steigend in $[x_2;0]$ und in $[x_3;\infty[$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_{4/5} = \frac{1}{2} \cdot (-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}) \Leftrightarrow x_4 = -2$ und $x_5 = 1$

Rechtskrümmung in]-2;1[, Linkskrümmung in]-∞; -2[und]1;∞[

2. a) Rechtskrümmung in]-∞;1[, Linkskrümmung in]1;∞[; Wendepunkt ≈ (1 / -2,2)

b) $f'(x) = 0{,}4 \cdot \left(1 \cdot e^x + (x-3) \cdot e^x\right) = 0{,}4 \cdot (x-2) \cdot e^x$ und

$f''(x) = 0{,}4 \cdot \left(1 + (x-2)\right) \cdot e^x = 0{,}4 \cdot (x-1) \cdot e^x$ also $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$ also Rechtskrümmung in]-∞;1[und Linkskrümmung in]1;∞[

Wendepunkt (1 / f(1)) ≈ (1 / -2,175)

c) Das uneigentliche Integral existiert und hat den Wert $-0{,}4 \cdot e^3 \approx -8{,}03$.

3. a) $f(x) = \frac{3x + 3}{x^2 + 1} \Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1) \cdot 3 - (3x + 3) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^2 + 3 - 6x^2 + 6x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-3x^2 - 6x + 3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-3(x^2 + 2x - 1)}{(x^2 + 1)^2}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{1}{2} \cdot (-2 \pm \sqrt{4 + 4}) = -1 \pm \sqrt{2}$; $y_1 = \frac{3 + 3\sqrt{2}}{2}$; $y_2 = \frac{3 - 3\sqrt{2}}{2}$

$HOP(x_1 / y_1) \approx (0{,}41 / 3{,}62)$ und $TIP(x_2 / y_2) \approx (-2{,}41 / -0{,}62)$, denn das Vorzeichen von $f'(x)$ wechselt bei x_1 von + auf − und bei x_2 von − auf + .

b) $$f''(x) = \frac{(x^2 + 1)^2 \cdot (-6x - 6) - (-3x^2 - 6x + 3) \cdot 2 \cdot (x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} =$$

$$\frac{(x^2 + 1) \cdot (-6x - 6) - (-3x^2 - 6x + 3) \cdot 4x}{(x^2 + 1)^3} = \frac{-6x^3 - 6x^2 - 6x - 6 + 12x^3 + 24x^2 - 12x}{(x^2 + 1)^3} =$$

$$\frac{6x^3 + 18x^2 - 18x - 6}{(x^2 + 1)^3} = \frac{6(x^3 + 3x^2 - 3x - 1)}{(x^2 + 1)^3} = \frac{6(x - 1) \cdot (x^2 + 4x + 1)}{(x^2 + 1)^3}$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x_3 = 1$ und $x_{4/5} = \frac{1}{2} \cdot (-4 \pm \sqrt{16 - 4}) = -2 \pm \sqrt{3}$ also $x_4 \approx -0{,}27$; $x_5 \approx -3{,}73$

Bei x_3, x_4 und x_5 ändert $f''(x)$ das Vorzeichen, daher hat G_f Wendepunkte an diesen Stellen.