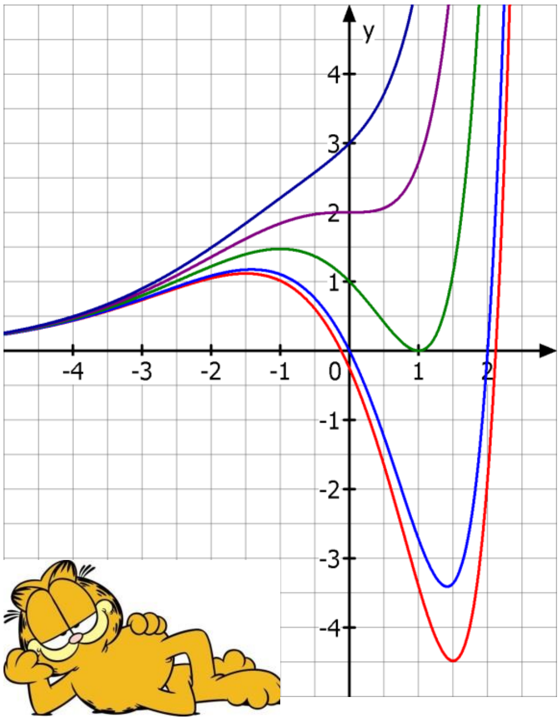
Q12 * Mathematik * Kurvenschar-Aufgabe

Das Bild zeigt fünf Graphen der Kurvenschar

$$f_k(x) = (x^2 - 2x + 2 - 2k) \cdot e^x \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{R}.$$



a) Bestimmen Sie alle Nullstellen der Schar in Abhängigkeit von k.

b) Bestimmen sie in Abhängigkeit von k alle Stellen, an denen ein Tiefpunkt liegt.

c) Bestimmen Sie k so, dass der Tiefpunkt an der Stelle $x_T = 1{,}5$ liegt.

d) Bestimmen Sie k so, dass der Hochpunkt an der Stelle $x_H = -1$ liegt.

e) Bestimmen Sie k so, dass der Graph von f_k einen Terrassenpunkt besitzt.

f) Ordnen Sie den abgebildeten Graphen die passenden Werte von k zu.

Q12 * Mathematik * Kurvenschar-Aufgabe

Das Bild zeigt fünf Graphen der Kurvenschar

$$f_k(x) = (x^2 - 2x + 2 - 2k) \cdot e^x \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen der Schar in Abhängigkeit von k.

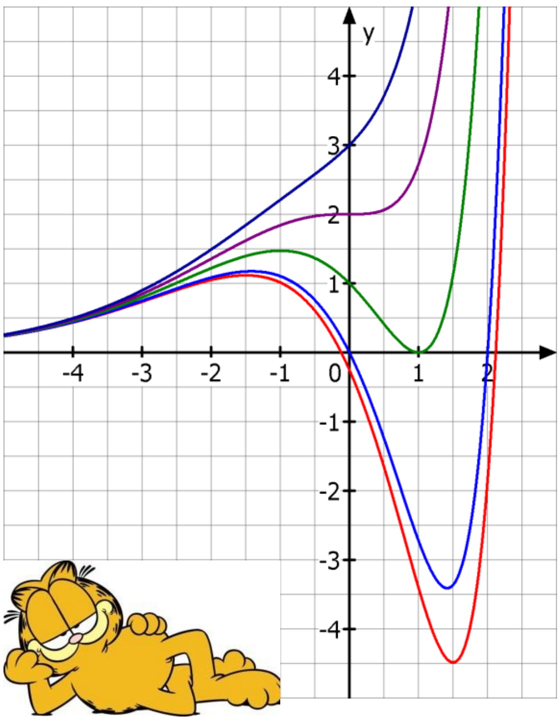
b) Bestimmen sie in Abhängigkeit von k alle Stellen, an denen ein Tiefpunkt liegt.

c) Bestimmen Sie k so, dass der Tiefpunkt an der Stelle $x_T = 1{,}5$ liegt.

d) Bestimmen Sie k so, dass der Hochpunkt an der Stelle $x_H = -1$ liegt.

e) Bestimmen Sie k so, dass der Graph von f_k einen Terrassenpunkt besitzt.

f) Ordnen Sie den abgebildeten Graphen die passenden Werte von k zu.



Q12 * Mathematik * Kurvenschar-Aufgabe * Lösungen

$f_k(x) = (x^2 - 2x + 2 - 2k)\cdot e^x$ mit $k \in R$.

a) $f_k(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 2 - 2k)\cdot e^x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 - 2k = 0 \Leftrightarrow$

$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{2k - 1}$ für $k \geq \frac{1}{2}$ (für $k = \frac{1}{2}$ genau eine Nullstelle die TIP ist!)

b) $f_k{'}(x) = (x^2 - 2k)\cdot e^x$ und $f_k{'}(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2k \Leftrightarrow x_{3/4} = \pm\sqrt{2k}$ für $k \geq 0$

$f_k{'}(x)$ hat Vorzeichenwechsel von $-$ auf $+$ bei $x_4 = \sqrt{2k}$ daher TIP$(\sqrt{2k}\,/\,...)$ für $k > 0$

c) $x_4 = 1{,}5 \Leftrightarrow \sqrt{2k} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2k = \frac{9}{4} \Leftrightarrow k = \frac{9}{8}$ also für $k = \frac{9}{8}$ TIP$(1{,}5\,/\,...)$

d) HOP $(-\sqrt{2k}\,/\,...)$ bei $x_3 = -1 \Leftrightarrow -\sqrt{2k} = -1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$ (grüner Graph!)

e) Terrassenpunkt für den Fall, dass TIP und HOP zusammenfallen,

also für $x_3 = x_4 = 0 = k$

Rechnung: $f_k{''}(x) = (x^2 + 2x - 2k)\cdot e^x$ und

$f_k{''}(x) = 0 \Leftrightarrow x_{5/6} = -1 \pm \sqrt{1 + 2k}$ für $k \geq -\frac{1}{2}$

für $k = 0$ gilt $f_0{''}(0) = f_0{'}(0) = 0$ und damit ist $(0\,/\,2\cdot e^0) = (0\,/\,2)$ Terrassenpunkt.

f) grüner Graph: $k = \frac{1}{2}$

blauer Graph: $k = 1$

roter Graph : $k = \frac{9}{8}$

lila Graph : $k = 0$

dunkelblau : $k = -\frac{1}{2}$, denn $f_k(0) = 3 \Leftrightarrow 0^2 - 2\cdot 0 + 2 - 2k = 3 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$