Klausur aus der Mathematik * Q12 m3 * 17.11.2015 * Lösung * Gruppe A

1. a) NSt.: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x+3) = 0 \Leftrightarrow$

$x_1 = 0$ (doppelte NSt) und $x_2 = -3$

$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x \cdot (x+2)$ und hor.Tg. für $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ und $x_3 = -2$

$f''(x) = 6x + 6 = 6 \cdot (x+1)$ also $f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow$ TIP $(0/f(0))$ mit $f(0) = 0$

$f''(-2) = -12 + 6 = -6 < 0 \Rightarrow$ HOP $(-2/f(-2))$ mit $f(-2) = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 = 4$

b) $f''(x) = 6 \cdot (x+1)$ d.h. $f''(x) = 0 \Leftrightarrow$

$x_4 = -1$ und $f''(x)$ ändert bei x_4 das Vorzeichen $\Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_4 = -1$ und

$f(x_4) = f(-1) = -1 + 3 = 2$ also Wendepunkt $WP(-1/2)$

c) $$A = \int_{-3}^{0} x^3 + 3x^2 \, dt = \left[\frac{x^4}{4} + x^3 \right]_{-3}^{0} = 0 - \left(\frac{81}{4} + (-27) \right) = \frac{27}{4} = 6,75$$

3. a) $I(x) = \int_1^x kt^2 - t^3 \, dt \Rightarrow I'(x) = kx^2 - x^3$ und $I''(x) = 2kx - 3x^2$

Für Wendepunkt muss gelten: $I''(x) = 0 \Leftrightarrow 2kx - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$x \cdot (2k - 3x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ oder $x_2 = \frac{2k}{3}$ wegen $x_2 = 2$ folgt $2 = \frac{2k}{3}$ also $k = 3$

b) $$I(2) = \int_1^2 3t^2 - t^3 \, dt = \left[t^3 - \frac{t^4}{4} \right]_1^2 = (2^3 - 4) - (1 - \frac{1}{4}) = 4 - \frac{3}{4} = 3,25 \text{ also } WP(2/3\tfrac{1}{4})$$

4. a) NSt. $f(x) = 0 \Leftrightarrow (2x^2 - 2) \cdot e^{-x} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 1$

$$A_1 = -\int_{-1}^{1} f(x) \, dx = -\int_{-1}^{1} (2x^2 - 2) \cdot e^{-x} \, dx$$

$F(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^{-x} \Rightarrow$

$F'(x) = (2ax + b) \cdot e^{-x} + (ax^2 + bx + c) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = (-ax^2 + (2a - b)x + b - c) \cdot e^{-x}$

Der Vergleich von $F'(x) = (-ax^2 + (2a - b)x + b - c) \cdot e^{-x}$ mit $(2x^2 - 2) \cdot e^{-x}$

liefert drei Gleichungen: (1) $2 = -a$ (2) $0 = 2a - b$ (3) $-2 = b - c$

also $a = -2$ und $b = 2a = -4$ und $c = b + 2 = -2$ und damit

$F(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^{-x} = (-2x^2 - 4x - 2) \cdot e^{-x} = -(2x^2 + 4x + 2) \cdot e^{-x}$

$$A_1 = -\int_{-1}^{1} (2x^2 - 2) \cdot e^{-x} \, dx = -\left[-(2x^2 + 4x + 2) \cdot e^{-x} \right]_{-1}^{1} = \left[(2x^2 + 4x + 2) \cdot e^{-x} \right]_{-1}^{1} =$$

$$\left[(2x^2 + 4x + 2) \cdot e^{-x} \right]_{-1}^{1} = (2 + 4 + 2) e^{-1} - (2 - 4 + 2) e = \frac{8}{e} \approx 2,94$$

b) $$A_b = \int_1^b f(x) \, dx = \int_1^b (2x^2 - 2) \cdot e^{-x} \, dx = \left[-(2x^2 + 4x + 2) \cdot e^{-x} \right]_1^b =$$

$$-\frac{2b^2 + 4b + 2}{e^b} - \left(-\frac{2 + 4 + 2}{e^1} \right) = -\frac{2b^2 + 4b + 2}{e^b} + \frac{8}{e}$$

Wegen $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^r}{e^x} = 0$ gilt $\lim\limits_{b \to \infty} \frac{2b^2 + 4b + 2}{e^b} = 0$ also $A_2 = \lim\limits_{b \to \infty} A_b = 0 + \frac{8}{e} = \frac{8}{e}$

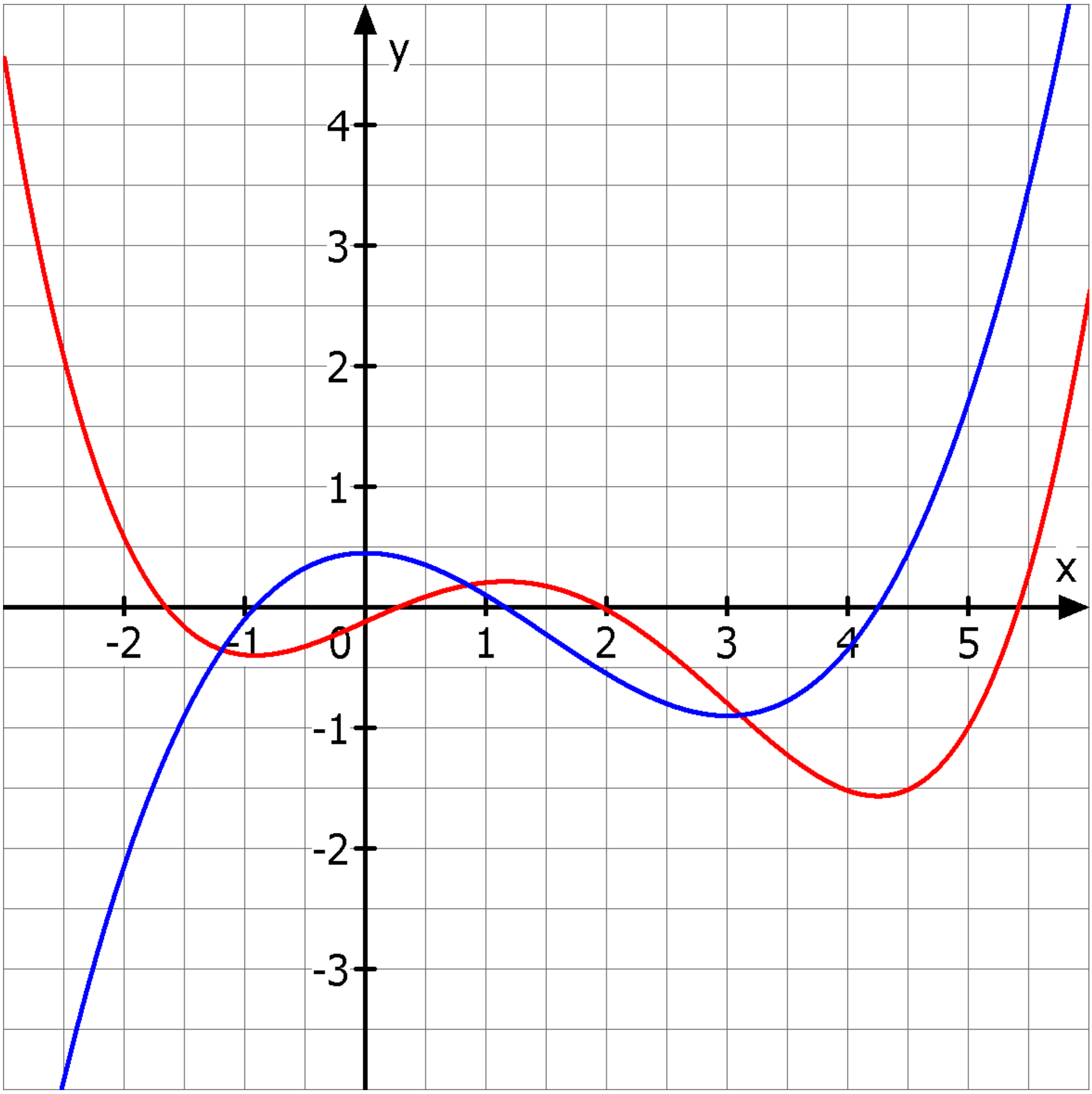
Petra hat also nicht Recht. Die beiden Flächen sind gleich groß!

Klausur aus der Mathematik * Q12 * m3 * 17.11.2015 * Arbeitsblatt zur Gruppe A

Musterlösung

2. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f .

   Das Bild des Graphen der Integralfunktion $I(x) = \int_2^x f(t)\,dt$ sieht wie folgt aus:



Klausur aus der Mathematik * Q12 m3 * 17.11.2015 * Lösung * Gruppe B

1. a) NSt.: $f(x)=0 \Leftrightarrow -x^3+3x^2=0 \Leftrightarrow x^2\cdot(-x+3)=0 \Leftrightarrow$

$x_1=0$ (doppelte NSt) und $x_2=3$

$f'(x)=-3x^2+6x=3x\cdot(-x+2)$ und hor.Tg. für $f'(x)=0 \Leftrightarrow x_1=0$ und $x_3=2$

$f''(x)=-6x+6=6\cdot(-x+1)$ also $f''(0)=6>0 \Rightarrow$ TIP $(0/f(0))$ mit $f(0)=0$

$f''(2)=-12+6=-6<0 \Rightarrow$ HOP $(2/f(2))$ mit $f(2)=-2^3+3\cdot 2^2=4$

b) $f''(x)=-6x+6$ d.h. $f''(x)=0 \Leftrightarrow$

$x_4=1$ und $f''(x)$ ändert bei x_4 das Vorzeichen $\Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_4=-1$ und

$f(x_4)=f(1)=-1+3=2$ also Wendepunkt $WP(1/2)$

c) $$A=\int_0^3 -x^3+3x^2\,dt=\left[-\frac{x^4}{4}+x^3\right]_0^3=-\frac{81}{4}+27-0=\frac{27}{4}=6{,}75$$

3. a) $$I(x)=\int_1^x t^3+kt^2\,dt \Rightarrow I'(x)=x^3+kx^2 \text{ und } I''(x)=3x^2+2kx$$

Für Wendepunkt muss gelten: $I''(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2+2kx=0 \Leftrightarrow$

$x\cdot(3x+2k)=0 \Leftrightarrow x_1=0$ oder $x_2=-\dfrac{2k}{3}$ wegen $x_2=2$ folgt $2=-\dfrac{2k}{3}$ also $k=-3$

b) $$I(2)=\int_1^2 t^3-3t^2\,dt=\left[\frac{t^4}{4}-t^3\right]_1^2=(4-2^3)-(\frac{1}{4}-1)=-4+\frac{3}{4}=-3{,}25 \text{ also } WP(2/-3\tfrac{1}{4})$$

4. a) NSt. $f(x)=0 \Leftrightarrow (2-2x^2)\cdot e^{-x}=0 \Leftrightarrow 2\cdot(1-x^2)=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x_{1/2}=\pm 1$

$$A_1=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(2-2x^2)\cdot e^{-x}\,dx$$

$F(x)=(ax^2+bx+c)\cdot e^{-x} \Rightarrow$

$F'(x)=(2ax+b)\cdot e^{-x}+(ax^2+bx+c)\cdot e^{-x}\cdot(-1)=(-ax^2+(2a-b)x+b-c)\cdot e^{-x}$

Der Vergleich von $F'(x)=(-ax^2+(2a-b)x+b-c)\cdot e^{-x}$ mit $(-2x^2+2)\cdot e^{-x}$

liefert drei Gleichungen: (1) $-2=-a$ (2) $0=2a-b$ (3) $2=b-c$

also $a=2$ und $b=2a=4$ und $c=b-2=2$ und damit

$F(x)=(ax^2+bx+c)\cdot e^{-x}=(2x^2+4x+2)\cdot e^{-x}$

$$A_1=\int_{-1}^{1}(2x^2-2)\cdot e^{-x}\,dx=\left[(2x^2+4x+2)\cdot e^{-x}\right]_{-1}^{1}=(2+4+2)\cdot e^{-1}-(2-4+2)\cdot e=$$

$$8e^{-1}-0=\frac{8}{e}\approx 2{,}94$$

b) $$A_b=-\int_1^b f(x)\,dx=-\int_1^b(2-2x^2)\cdot e^{-x}\,dx=-\left[(2x^2+4x+2)\cdot e^{-x}\right]_1^b=$$

$$-\frac{2b^2+4b+2}{e^b}-(-\frac{2+4+2}{e^1})=-\frac{2b^2+4b+2}{e^b}+\frac{8}{e}$$

Wegen $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^r}{e^x}=0$ gilt $\lim\limits_{b\to\infty}\dfrac{2b^2+4b+2}{e^b}=0$ also $A_2=\lim\limits_{b\to\infty}A_b=0+\dfrac{8}{e}=\dfrac{8}{e}$

Petra hat also nicht Recht. Die beiden Flächen sind gleich groß!

Klausur aus der Mathematik * Q12 * m3 * 17.11.2015 * Arbeitsblatt zur Gruppe B

Musterlösung

2. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f .

   Tragen Sie in das Bild den Graphen der Integralfunktion $I(x) = \int_2^x f(t)\,dt$ möglichst sauber und genau ein.