Q12 * Mathematik * Typische Aufgaben zum Skalarprodukt im R^3

1. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E , die von der Geraden AB senkrecht im Punkt A geschnitten wird. Es gelte A(1/2/3) und B(5/-1/1).

2. Gegeben ist die Ebene E im R^3 mit $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   a) Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden g, die die Ebene E senkrecht schneidet.
   b) Bestimmen die die Koordinatenform der Ebene E.

3. Im R^3 sind die drei Punkte A(1/2/-3), B(7/5/3) und C(1/-1/3) gegeben.
   a) Bestimmen Sie die drei Seitenlängen im Dreieck ABC.
   b) Bestimmen Sie die drei Innenwinkel im Dreieck ABC.
   c) Bestimmen Sie den Fußpunkt F des Lotes von C auf die Seite [AB].
   d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

4. Im R^3 sind die drei Punkte A(1/2/3), B(3/2/4) und C(5/5/4) gegeben.
   a) Geben Sie die Gleichung der durch die drei Punkte A, B und C festgelegten Ebene E an.
   b) Bestimmen Sie einen Punkt, der von der Ebene E den Abstand 14 hat.
   c) Geben Sie eine Gerade g an, die im Abstand 7 parallel zur Ebene E verläuft.

5. Gegeben sind die beiden Geraden g und h mit
   $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$
   a) Begründen Sie, dass g und h parallel zueinander liegen.
   b) Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden voneinander!

6. Im R^3 ist die Ebene $E: 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 6$, der Punkt P (6 / -3 / 6) und die Gerade g : $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ gegeben.
   a) Zeigen Sie, dass P nicht in der Ebene E liegt und bestimmen Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes P^* von P bei Spiegelung an der Ebene E.
   b) Bestimmen Sie die Gleichung der Spiegelgeraden g^* von g bei Spiegelung an der Ebene E.

Q12 * Mathematik * Typische Aufgaben zum Skalarprodukt im R3 * Lösungen

1. Gerade AB: $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\\-2\end{pmatrix}$ und z.B. E: $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

2. a) $\vec{n} \perp \begin{pmatrix}-3\\3\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{n} \perp \begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow$ z.B. $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$; also z.B. g: $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$

   b) E: $+1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 - 3\cdot x_3 + 4 = 0$; die Koeffizienten bei x_1, x_2 und x_3 stimmen mit den Koordinaten des Richtungsvektors von g überein.

3. a) $\overline{AB} = 9$; $\overline{AC} = 3\cdot\sqrt{5}$; $\overline{BC} = 6\cdot\sqrt{2}$

   b) $\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha \approx 63{,}4^\circ$; $\cos(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ ß $= 45^\circ$; $\cos(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \gamma \approx 71{,}6^\circ$;

   c) $F(3/3/-1)$

   d) $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CF} = \frac{1}{2}\cdot 9\cdot\sqrt{2^2+4^2+4^2} = 27$

4. a) z.B. E: $\vec{X} = \vec{A} + s\cdot\overrightarrow{AB} + t\cdot\overrightarrow{AC}$ also E: $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}$

   b) $\vec{n} \perp \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{n} \perp \begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}$ gilt z.B. für $\vec{n} = \begin{pmatrix}-3\\2\\6\end{pmatrix}$; $\vec{n}^{\,o} = \frac{\begin{pmatrix}-3\\2\\6\end{pmatrix}}{\sqrt{9+4+36}} = \frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\6\end{pmatrix}$

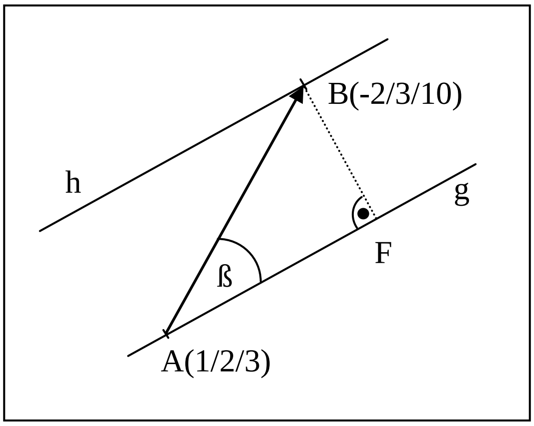
   z.B. $\vec{P} = \vec{A} + 14\cdot\vec{n}^{\,o} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + 14\cdot\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\6\\15\end{pmatrix}$, also $P(-5/6/15)$

   c) Wähle als Aufpunkt Q von g, z.B: $\vec{Q} = \vec{A} + 7\cdot\vec{n}^{\,o} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\2\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\4\\9\end{pmatrix}$

   und wähle z.B. g || AB , d.h. dann g: $\vec{X} = \vec{Q} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\4\\9\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

5\. a) Für die Richtungsvektoren gilt $\begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix} = (-1)\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\\-2\end{pmatrix}$, also gilt $g \parallel h$.

b) $\cos(ß) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \circ \begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \sqrt{16+9+4}} = \dfrac{\begin{pmatrix}-3\\1\\7\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix}}{\sqrt{9+1+49}\cdot\sqrt{16+9+4}} = \dfrac{29}{\sqrt{59}\cdot\sqrt{29}}$



(also $ß \approx 45{,}49^o$)

und $d = \overline{BF} = \overline{AB}\cdot\sin(ß) = \sqrt{59}\cdot\sin(ß) \approx 5{,}48$

Man kann aber F auch direkt ausrechnen! (Vorteil: Man erhält ein exaktes Ergebnis!)
Die Ebene E soll B enthalten und von h senkrecht geschnitten werden. Es gilt:

$E: \ \vec{X} = \begin{pmatrix}-2\\3\\10\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}$ und $E \cap g = \{F\}$

nach dem Gleichsetzen folgt $t = -1$, $k = -1$ und $r = 1$ also $F(-3/5/5)$ und

$d = \overline{BF} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{30} \approx 5{,}48$

6\. a) P liegt nicht in E, denn $2\cdot 6 - 2\cdot(-3) + 6 = 24 \neq 6$

$A(3/0/0),\ B(0/-3/0),\ C(0/0/6) \in E$, d.h. $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}0\\3\\6\end{pmatrix}$ spannen E auf.

$\vec{n} \perp \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{n} \perp \begin{pmatrix}0\\3\\6\end{pmatrix}$ gilt z.B. für $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$

$g: \ \vec{X} = \vec{P} + r\cdot\vec{n}$; $g \cap E$ liefert $r = -2$ und $g \cap E = \{S\}$ mit $S(2/1/4)$

$\overrightarrow{P^*} = \vec{P} + 2\cdot\overrightarrow{PS} = \vec{S} + \overrightarrow{SP} = \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4\\4\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\5\\2\end{pmatrix}$ also $P^*(-2/5/2)$

b) $E \cap g: \ 2\cdot(4+2r) - 2\cdot(-3-r) + (1+3r) = 6 \Leftrightarrow 9r = -9 \Leftrightarrow r = -1$ also

$E \cap g = \{S\}$ mit $S(2/-2/-2)$; wähle $T(4/-3/1) \in g$ und $h: \vec{X} = \vec{T} + s\cdot\vec{n}$ ($\vec{n}$ aus 6a))

$h \cap E = \{Q\}$ und $\overrightarrow{T^*} = \vec{T} + 2\cdot\overrightarrow{TQ}$ und ST^* ist die gesuchte Spiegelgerade.

$h \cap E = \{Q\}$ liefert $2(4+2s) - 2(-3-2s) + 1 + s = 6 \Leftrightarrow s = -1$ und $Q(2/-1/0)$

$\overrightarrow{T^*} = \vec{T} + 2\cdot\overrightarrow{TQ} = \begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$ also $T^*(0/3/1)$ und $g^*: \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}-2\\5\\3\end{pmatrix}$