Q12 * Mathematik * Lineare Unabhängigkeit und Geraden im R^3

1. Bestimmen Sie alle Werte von k, für welche die drei Vektoren linear abhängig sind. Stellen Sie anschließend den Vektor $\vec{a}$ als Linearkombination von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.

   a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} k \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ k+2 \\ 7 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} k-1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. Die Punkte A(2/2/0), B(6/4/8), C(9/4/-1) und D(8/5/0) legen die Geraden g = AB und k = CD fest.
   a) Zeigen Sie, dass diese beiden Geraden windschief zueinander sind.
   b) Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden voneinander.

3. Die drei Punkte A(1/1/1), B(2/3/4) und C(3/2/1) legen eine Ebene E fest. Die Gerade g geht durch die Punkte S(1/0/1) und T(2/1/0).
   a) Bestimmen Sie alle Punkte P auf der Geraden g, für die die Pyramide ABCP das Volumen V = 3 besitzt.
   b) Bestimmen Sie den Abstand der in 3. a) gefundenen Punkte von der Ebene E.

4. Gegeben sind die beiden Punkte A(1/2/3) und B(3/0/4).
   a) Bestimmen Sie einen Punkt S so, dass das Dreieck ABC den Flächeninhalt 6 hat.
   b) Bestimmen Sie Punkte C und D so, dass das Viereck ABCD ein Quadrat ist. Geben Sie auch den Flächeninhalt dieses Quadrats an.

5. Gegeben sind die beiden Punkte A(1/2/3) und B(4/4/6).
   a) Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden g, die windschief zu AB ist und von AB den Abstand 2 besitzt.
   b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Geraden AB mit der x_2x_3 – Ebene und der x_1x_2 – Ebene.
   c) Bestimmen Sie eine Gerade h mit folgender Eigenschaft: h liegt in der x_1x_2 – Ebene und h und die Gerade AB schneiden sich senkrecht.

Q12 * Mathematik * Lineare Unabhängigkeit und Geraden im R^3

1. a) $\det(\vec a,\vec b,\vec c) = 8k^2+6k-14 = 0 \;\Leftrightarrow\; k_1 = 1\;;\; k_2 = -\frac{7}{4}$

$$\text{für } k_1 = 1 \text{ gilt } \quad \vec a = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} = \frac{3}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\7\end{pmatrix} = \frac{3}{2}\cdot\vec b + \frac{1}{2}\cdot\vec c$$

$$\text{für } k_2 = -\frac{7}{4} \text{ gilt } \quad \vec a = \begin{pmatrix}-1,75\\3\\2\end{pmatrix} = -\frac{41}{24}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1,75\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{24}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0,25\\7\end{pmatrix} = \frac{3}{2}\cdot\vec b + \frac{1}{2}\cdot\vec c$$

b) $\det(\vec a,\vec b,\vec c) = -2k^2+10k-12 = 0 \;\Leftrightarrow\; k_1 = 2\;;\; k_2 = 3$

$$\text{für } k_1 = 2 \text{ gilt } \quad \vec a = \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} = -\frac{3}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix} = -\frac{3}{2}\cdot\vec b + \frac{1}{2}\cdot\vec c$$

$$\text{für } k_1 = 3 \text{ gilt } \quad \vec a = \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} = -2\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix} = -2\cdot\vec b + 1\cdot\vec c$$

2. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}4\\2\\8\end{pmatrix},\; \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AB} \neq r\cdot\overrightarrow{CD}$ für alle $r \in R \;\Rightarrow\; AB \nparallel CD$

$$g \cap k:\quad \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\5\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} (1)\;\; 2+4r = 8-s \;\Rightarrow\; s = 6-4r \;\underset{(2)}{\Rightarrow}\; s = 8 \\ (2)\;\; 2+2r = 5+s \;\underset{(3)}{\Rightarrow}\; -3 = 6r \;\Rightarrow\; r = -0,5 \\ (3)\;\; 8r = s \;\underset{(2)}{\Rightarrow}\; s = -4 \neq 8 \end{array}\right.$$

Also sind g und k windschief zueinander.

b) Sind F_1 und F_2 die Fußpunkte des Lots von g auf k, so gilt: $\overrightarrow{F_1F_2} = t^*\cdot(\overrightarrow{AB}\,x\,\overrightarrow{CD})$

$$\overrightarrow{AB}\,x\,\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}4\\2\\8\end{pmatrix} x \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-12\\6\end{pmatrix} = -6\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \quad \text{also} \quad \overrightarrow{F_1F_2} = t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{F_1F_2} = \vec F_2 - \vec F_1 = \begin{pmatrix}8\\5\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\8\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}6\\3\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} - r\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\8\end{pmatrix} \quad \text{also}$$

$$\begin{pmatrix}6\\3\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} - r\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\8\end{pmatrix} = t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \ldots \;\Leftrightarrow\; s = 2,\; t = 2,\; r = \frac{1}{2} \quad \text{also} \quad \overrightarrow{F_1F_2} = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$$

und der gesuchte Abstand beträgt $\left|\overrightarrow{F_1F_2}\right| = \sqrt{2^2+4^2+2^2} = \sqrt{24} = 2\cdot\sqrt{6}$

[$F_1(4/3/4)$ und $F_2(6/7/2)$]

3. a) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix};\ g:\ \vec{X}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix};\ \overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$3=V_{\text{Pyramide}}=\frac{1}{6}\cdot\left|\det(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\overrightarrow{AP})\right|=....=\frac{1}{6}\cdot\left|6s-6\right|=\left|s-1\right|\ \Rightarrow\ s_1=4 \text{ und } s_2=-2\ \Rightarrow$

$\overrightarrow{AP_1}=\begin{pmatrix}4\\2\\-6\end{pmatrix}$ und $\vec{P_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\2\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\\-5\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AP_2}=\begin{pmatrix}-2\\-4\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{P_2}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\-4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-3\\1\end{pmatrix}$

also $P_1(5/3/-5)$ und $P_2(-1/-3/1)$

b) $A_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{9+36+9}=\frac{3\cdot\sqrt{6}}{2}$ und $3=V_{\text{Pyramide}}=\frac{1}{3}\cdot A_{\Delta ABC}\cdot h\ \Rightarrow$

$3=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\cdot\sqrt{6}}{2}\cdot h\ \Rightarrow\ h=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$ und $h=d(E,P_{1/2})$ entspricht genau dem gesuchten Abstand.

4. a) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix},\ 6=A_{\Delta ABS}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AS}\right|$ versuche z.B. folgende Wahl: $\overrightarrow{AS}=\begin{pmatrix}t_1\\0\\0\end{pmatrix}$

$6=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}t_1\\0\\0\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\t_1\\2\cdot t_1\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot t_1\ \Rightarrow\ t_1=\frac{12}{\sqrt{5}}=2{,}4\cdot\sqrt{5}$ und $\vec{S}=\begin{pmatrix}1+2{,}4\cdot\sqrt{5}\\1\\1\end{pmatrix}$

b) Suche zu $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ einen senkrechten Vektor, z.B. $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$; es gilt $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\vec{v}\right|=3$

$\vec{C}=\vec{B}+\vec{v}$ und $\vec{D}=\vec{A}+\vec{v}$ also $C(3/5/6)$ und $D(2/3/3)$ und $A_{\text{Quadrat}}=3\cdot3=9$

5. a) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}$, wähle $\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\perp\overrightarrow{AB}$ und für $\vec{w}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$ gilt dann

$\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ stehen jeweils senkrecht aufeinander. Es gilt nun $\left|\sqrt{2}\cdot\vec{v}\right|=2$ und

für $\vec{C}=\vec{A}+\sqrt{2}\cdot\vec{v}$ folgt damit $g:\vec{X}=\vec{C}+r\cdot\vec{w}$ ist windschief zu AB mit Abstand 2.

b) $AB:\ \vec{X}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}$; $AB\cap x_2x_3-$Ebene: $0=x_1=1+3s$ also $s=-\frac{1}{3}$ und $\vec{S_1}=\begin{pmatrix}1-1\\2-2/3\\3-1\end{pmatrix}$

also AB schneidet x_2x_3-Ebene im Punkt $S_1(0/\frac{4}{3}/2)$

$AB\cap x_1x_2-$Ebene: $0=x_3=3+3s\ \Rightarrow s=-1$ und $S_3(-2/0/0)$

c) $h:\ \vec{X}=\vec{S_3}+t\cdot\vec{u}$ mit $\vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{u}\perp\overrightarrow{AB}\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}=0\ \Rightarrow 3\cdot u_1+2\cdot u_2=0$

wähle z.B. $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}$ und damit erfüllt $h:\ \vec{X}=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}$ alle geforderten Eigenschaften.