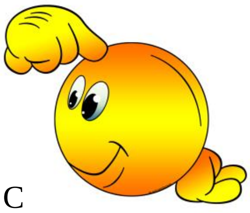
Q12 * Mathematik * Unbestimmte Integrale

1. Folgende unbestimmte Integrale lassen sich (relativ einfach) bestimmen.



$$\int 2\cdot(3x+4)^5\,dx = 2\cdot\int(3x+4)^5\,dx = 2\cdot\frac{(3x+4)^6}{6}\cdot\frac{1}{3} + C = \frac{(3x+4)^6}{9} + C$$

$$\int 2\cdot\sqrt{3x+4}\,dx = 2\cdot\int(3x+4)^{1/2}\,dx = 2\cdot\frac{(3x+4)^{3/2}}{3/2}\cdot\frac{1}{3} + C = \frac{4\cdot(3x+4)^{3/2}}{9} + C$$

$$\int x\cdot\sqrt{3x^2+4}\,dx = \int x\cdot(3x^2+4)^{1/2}\,dx = \frac{(3x^2+4)^{3/2}}{9} + C\ ,\ \text{denn}$$

Probeansatz $y=(3x^2+4)^{3/2}$ liefert $y' = \frac{3}{2}\cdot(3x^2+4)^{1/2}\cdot 3\cdot 2x = x\cdot(3x^2+4)^{1/2}\cdot 9$

$$\int \frac{3x^3}{\sqrt{5x^4+1}}\,dx = \int 3x^3\cdot(5x^4+1)^{-1/2}\,dx = \frac{3}{10}\cdot(5x^4+1)^{1/2} + C\ ,\ \text{denn}$$

Probeansatz $y=(5x^4+1)^{1/2}$ liefert $y' = \frac{1}{2}\cdot(5x^4+1)^{-1/2}\cdot 5\cdot 4\cdot x^3 = x^3\cdot(5x^4+1)^{-1/2}\cdot 10$

$$\int 2\cdot e^{3x-4}\,dx = 2\cdot\int e^{3x-4}\,dx = 2\cdot e^{3x-4}\cdot\frac{1}{3} + C = \frac{2}{3}\cdot e^{3x-4} + C$$

$$\int x\cdot e^{3x^2-4}\,dx = \frac{1}{6}\cdot e^{3x^2-4} + C\ ,\ \text{denn}$$

Probeansatz $y = e^{3x^2-4}$ liefert $y' = e^{3x^2-4}\cdot 3\cdot 2x = x\cdot e^{3x^2-4}\cdot 6$

Den häufig auftretenden Typ $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$ sollte man erkennen.

$$\int \frac{x}{2+3x^2}\,dx = \frac{1}{6}\cdot\ln(2+3x^2) + C\ ,\ \text{denn}$$

Probeansatz $y=\ln(2+3x^2)$ liefert $y' = \frac{1}{2+3x^2}\cdot 3\cdot 2x = \frac{x}{2+3x^2}\cdot 6$

(Hinweis: $\ln|2+3x^2| = \ln(2+3x^2)$, denn $2+3x^2>0$)

$$\int \frac{e^x}{2+e^x}\,dx = \ln(2+e^x) + C \quad \text{oder} \quad \int \frac{4x^3}{1+x^4}\,dx = \ln(1+x^4) + C$$

2. Bei den folgenden unbestimmten Integralen muss ein Gymnasiast passen.

$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$ $\left[\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C\right]$

$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ $\left[\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C\right]$

$\int e^{x^2}\,dx$ [$\int e^{x^2}\,dx$ kann man nicht integralfrei schreiben!]

Das unbestimmte Integral $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C$ lässt sich aber bestätigen:

$$y = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \Rightarrow y' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\cdot\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$y' = \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{x\cdot\sqrt{1+x^2}+1+x^2} = \frac{(\sqrt{1+x^2}+x)\cdot(1+x^2-x\cdot\sqrt{1+x^2})}{(x\cdot\sqrt{1+x^2}+1+x^2)\cdot(1+x^2-x\cdot\sqrt{1+x^2})} = \ldots = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$