Q12 * Mathematik * Aufgaben zur Vektorrechnung (Wiederholung)

Vektoren: $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$; $\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$; $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

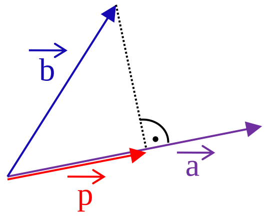
Skalarprodukt: $\vec{a} \circ \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi(\vec{a}, \vec{b})$ also $\cos\varphi(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}$ und $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0$

Kreuzprodukt: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$ und $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ und $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$ und $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\varphi(\vec{a}, \vec{b})$

$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$; $V_{\text{Pyramide ABCD}} = \frac{1}{6} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \circ (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD})\right| = \frac{1}{6} \cdot \left|\overrightarrow{AD} \circ (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})\right|$

Hilfreich: Die **Projektion** $\vec{p}$ eines Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$

$$\vec{p} = \frac{\vec{b} \circ \vec{a}}{\left|\vec{a}\right|^2} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{b} \circ \vec{a}}{\vec{a} \circ \vec{a}} \cdot \vec{a}$$



1. Gegeben sind die Punkte A(–2/ –1 / 4), B(6 / 5 / 0), C(8 / 3 / 1) und P(3 / 6 / 10).
   a) Ergänzen Sie das Dreieck ABC zu einem Parallelogramm ABCD und berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Parallelogramms.
   b) Zeigen Sie, dass P nicht in der vom Dreieck ABC aufgespannten Ebene liegt.
   c) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P von der Geraden AB.

2. Gegeben sind die Punkte A(1/ 2 / 3), B(7 / – 4 / 6) und C(6 / 0 / 7).
   a) Zeigen Sie, dass C nicht auf der Geraden g = AB liegt.
   b) Berechnen Sie im Dreieck ABC die Größe des Winkels $\alpha = \sphericalangle BAC$ und die Länge b der Seite [AC].
   c) Bestimmen Sie den Fußpunkt F des Lots von C auf die Gerade g.
   Bestimmen Sie mit Hilfe dieses Fußpunktes den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.
   d) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit Hilfe eines geeigneten Kreuzproduktes.
   e) Bestimmen Sie einen Punkt P so, dass die Pyramide ABCP das Volumen 54 besitzt.
   f) Der Punkt C soll an der Geraden g gespiegelt werden.
   Bestimmen Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes C^*.
   g) Bestimmen Sie zwei Punkte S und T auf der Geraden g so, dass das Dreieck STC gleichschenklig und rechtwinklig ist, mit dem rechten Winkel bei
   i) T ii) C.
   h) Bestimmen Sie einen Punkt M so, dass die Kugel mit Mittelpunkt M und Radius r = 6 die durch das Dreieck ABC aufgespannte Ebene E als Tangentialfläche besitzt.

3. Gegeben sind die Punkte A(1 / 2 / 3), B(3 / 5 / – 3) und C(9/ 7 / 0).
   a) Zeigen Sie, dass man das Dreieck ABC zu einem Quadrat ABCD ergänzen kann.
   Bestimmen Sie die Koordinaten von D.
   b) Bestimmen Sie den Mittelpunkt M einer Kugel mit Radius $r_1 = 3{,}5$ so, dass diese Kugel das Quadrat im Schnittpunkt der Diagonalen des Quadrats berührt.
   c) Die Kugel um M (aus Aufgabe b) mit dem Radius $r_2 = 5{,}5$ schneidet die durch das Quadrat festgelegte Ebene E in einem Kreis mit dem Radius r_3.
   Berechnen Sie r_3!

1. a) $\vec{D} = \vec{A} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8-6 \\ 3-5 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ also $D(0/-3/5)$

$$A_{ABCD} = \left| \overrightarrow{AB} \, x \, \overrightarrow{AD} \right| = \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -16 \\ -28 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 16^2 + 28^2} = 6 \cdot \sqrt{29}$$

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$

und der Ansatz $\overrightarrow{AP} = r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AD}$ führt zu einem Widerspruch.

Oder $V_{\text{Pyramide ABDP}} = \frac{1}{6} \cdot \left| \overrightarrow{AP} \circ (\overrightarrow{AB} \, x \, \overrightarrow{AD}) \right| = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ -16 \\ -28 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot \left| -10 - 112 - 168 \right| = 48\frac{1}{3} \neq 0$

c) Projektion von $\overrightarrow{AP}$ auf $\overrightarrow{AB}$ liefert $\overrightarrow{AF}$ mit dem Fußpunkt F.

$$\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AP} \circ \overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AB}} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{40 + 42 - 24}{64 + 36 + 16} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ also } \vec{F} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gesuchter Abstand $d = \left| \overrightarrow{PF} \right| = \sqrt{(3-2)^2 + (6-2)^2 + (10-2)^2} = \sqrt{81} = 9$

2. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7-1 \\ -4-2 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6-1 \\ 0-2 \\ 7-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} \neq r \cdot \overrightarrow{AB}$ für alle $r \in R$

also liegt der Punkt C nicht auf der geraden $g = AB$.

b) $\left| \overrightarrow{AC} \right| = \sqrt{25 + 4 + 16} = \sqrt{45} = 3 \cdot \sqrt{5}$ und

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC}}{\left| \overrightarrow{AB} \right| \cdot \left| \overrightarrow{AC} \right|} = \frac{30 + 12 + 12}{\sqrt{81} \cdot \sqrt{45}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(\frac{2}{\sqrt{5}}) = 26{,}56...^\circ \approx 26{,}6^\circ$$

c) $\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AB}} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{30 + 12 + 12}{36 + 36 + 9} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ also $\vec{F} = \vec{A} + \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{AB} \right| \cdot \left| \overrightarrow{CF} \right| = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \sqrt{(6-5)^2 + (0+2)^2 + (7-5)^2} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \sqrt{9} = 13{,}5$$

d) $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{AB} \, x \, \overrightarrow{AC} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -18 \\ -9 \\ 18 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{18^2 + 9^2 + 18^2} = \frac{1}{2} \cdot 27 = 13{,}5$

e) $V=\frac{1}{3}\cdot A_{\Delta ABC}\cdot h \;\Rightarrow\; h=\frac{3\cdot V}{A_{\Delta ABC}}=\frac{3\cdot 54}{13,5}=12$ und $\vec{n}=\frac{1}{9}\cdot\overrightarrow{AB}\,\mathrm{x}\,\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$ steht senkrecht auf

der Dreiecksfläche und $\left|\vec{n}\right|=3$, also ist z.B. $\vec{P}=\vec{A}+12\cdot\frac{1}{3}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\-2\\11\end{pmatrix}$,

also $P(-7/-2/11)$ eine passende Pyramidenspitze.

f) $\overrightarrow{C^*}=\vec{F}+\overrightarrow{CF}=2\cdot\vec{F}-\vec{C}=\begin{pmatrix}10-6\\-4-0\\10-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-4\\3\end{pmatrix}$ also $C^*(4/-4/3)$

g) i) $T=F=(5/-2/5)$ und $\vec{S}=\vec{F}+\frac{\left|\overrightarrow{CF}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}5\\-2\\5\end{pmatrix}+\frac{3}{9}\cdot\begin{pmatrix}6\\-6\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-4\\6\end{pmatrix}$ also $S(7/-4/6)$

ii) $S(7/-4/6)$ wie bei i) und $\vec{T}=\vec{F}-\frac{\left|\overrightarrow{CF}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}5\\-2\\5\end{pmatrix}-\frac{3}{9}\cdot\begin{pmatrix}6\\-6\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$ also $T(3/0/4)$

h) M mus von der Ebene E den Abstand $d=r=6$ besitzen.

Z.B. $\vec{M}=\vec{A}+6\cdot\frac{\vec{n}}{\left|\vec{n}\right|}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\frac{6}{3}\cdot\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\7\end{pmatrix}$

3. a) $\overrightarrow{BA}=\begin{pmatrix}-2\\-3\\6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}6\\2\\3\end{pmatrix}$ und $\left|\overrightarrow{BA}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{2^2+3^2+6^2}=7$

$\overrightarrow{BA}\circ\overrightarrow{BC}=-12-6+18=0 \;\Rightarrow\; \overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{BC} \;\Rightarrow$

Quadrat ABCD mit $\vec{D}=\vec{A}+\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}1+6\\2+2\\3+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\4\\6\end{pmatrix}$ also $D(7/4/6)$

b) $\overrightarrow{BA}\,\mathrm{x}\,\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-2\\-3\\6\end{pmatrix}\mathrm{x}\begin{pmatrix}6\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-21\\42\\14\end{pmatrix}=7\cdot\begin{pmatrix}-3\\6\\2\end{pmatrix}$, verwende $\vec{n}=\begin{pmatrix}-3\\6\\2\end{pmatrix}$ mit $\left|\vec{n}\right|=7$

Diagonalenschnittpunkt S mit $\vec{S}=\frac{1}{2}\cdot(\vec{A}+\vec{C})$ also $S(5/4,5/1,5)$ und

$\overrightarrow{M}=\vec{S}\pm 3,5\cdot\frac{1}{7}\cdot\vec{n}$ also z.B. $\overrightarrow{M}=\vec{S}+3,5\cdot\frac{1}{7}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}5\\4,5\\1,5\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-3\\6\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3,5\\7,5\\2,5\end{pmatrix}$

c) Es gilt $r_1^{\,2}+r_3^{\,2}=r_2^{\,2}$ also $r_3=\sqrt{r_2^{\,2}-r_1^{\,2}}=\sqrt{5,5^2-3,5^2}=\sqrt{18}=3\cdot\sqrt{2}$