Q12 * Mathematik * Verschiedene Aufgaben zur analytischen Geometrie

1. Gegeben sind die beiden Geraden

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   Bestimmen Sie den Abstand der beiden windschiefen Geraden.

2. Gegeben ist die Ebene $E: \; 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 6 = 0$.
   a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von E mit den Koordinatenachsen.
   b) Bestimmen Sie den Schnittwinkel von E mit der x_1x_3-Ebene.
   c) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P(1/2/3) von der Ebene E.
   d) Bestimmen Sie den Schnittwinkel der Geraden g = AB mit der Ebene E, wenn gilt A(1/2/3) und B(4/-1/1).

3. Für die Pyramide ABCDS gilt: A(0/0/0), B(4/0/0), C(4/4/0), D(0/4/0) und S(2/2/6).
   a) Skizzieren Sie die Pyramide in einem x_1-x_2-x_3-Koordinatensystem.
   b) Berechnen Sie die Winkel, unter denen sich die Seitenflächen der Pyramide schneiden.
   c) Berechnen Sie die Winkel, unter sich die Kanten der Pyramide schneiden.
   d) Berechnen Sie den Flächeninhalt einer Seitenfläche der Pyramide.

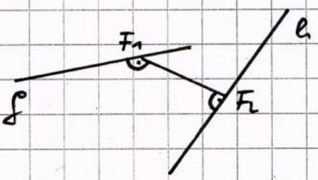
4. Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Geraden g mit der Kugel k(M ; r = 5) für M(1/2/3) und g = AB mit A(6/3/3) und B(9/5/1).

5. Gegeben ist die Ebene $E: : \; x_1 + x_2 + 5x_3 - 3 = 0$ und die Gerade g = AB mit A(6/-1/5) und B(9/3/9)
   a) Berechnen Sie den Schnittpunkt S von g und E.
   b) Bestimmen Sie die Gleichung der senkrechten Projektion p von g in die Ebene E.
   d) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden h, die in E liegt und p senkrecht schneidet.

Q12 * Mathematik * Verschiedene Aufgaben zur analytischen Geometrie

1. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-1\\6\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\2\\-2\end{pmatrix} = -2\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$



$\vec{F_2} = \begin{pmatrix}4\\-1\\6\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{F_2} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

(1) $4 + s = 1 + r + 2t \Rightarrow s = -3 + r + 2t$

(2) $-1 + s = +3r - t \qquad$ (2') $-4 + r + 2t = 3r - t \Leftrightarrow 3t = 2r + 4$

(3) $6 - s = 1 + r + t \qquad$ (3') $9 - r - 2t = 1 + r + t \Leftrightarrow 8 - 2r = 3t$

$\Rightarrow 2r + 4 = 8 - 2r \Leftrightarrow 4r = 4 \Leftrightarrow r = 1; \quad t = (2\cdot 1 + 4) : 3 = 2$

$s = -3 + 1 + 4 = 2$

$\vec{F_2} = \begin{pmatrix}4\\-1\\6\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \qquad F_2(6/1/4)$

$d = |\vec{F_1F_2}| = \sqrt{16+4+4} = 2\sqrt{6}$

$\vec{F_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} \qquad F_1(2/3/2)$

2. $E: 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 6 = 0 \quad | :6$

a) $E: \frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{1{,}5} + \frac{x_3}{3} = 1 \qquad S_1(2/0/0) \quad S_2(0/-1{,}5/0) \quad S_3(0/0/3)$

(Achsenabschnittsform)

b) x_1x_3 - Ebene : $x_2 = 0 \qquad \vec{n}_{E_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{n}_E = \begin{pmatrix}3\\-4\\2\end{pmatrix}$

$\cos\varphi = \left|\frac{\vec{n}_{E_2} \circ \vec{n}_E}{\sqrt{1^2}\cdot\sqrt{9+16+4}}\right| = \left|\frac{-4}{\sqrt{29}}\right| = \frac{4}{\sqrt{29}} \Rightarrow \varphi = 42{,}03...^\circ \approx 42{,}0^\circ$

c) $E_{HNF}: \frac{1}{\sqrt{29}}(3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 6) = 0 \qquad P(1/2/3)$

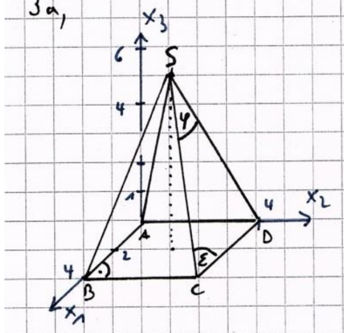
$d(P;E) = \frac{1}{\sqrt{29}}(3\cdot 1 - 4\cdot 2 + 2\cdot 3 - 6) = \frac{-5}{\sqrt{29}} \qquad$ Abstand $\frac{5}{29}\sqrt{29}$

d) $AB: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1-4\\2+1\\3-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-3\\3\\2\end{pmatrix}$

$\sin\varphi = \left|\frac{\begin{pmatrix}-3\\3\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}3\\-4\\2\end{pmatrix}}{\sqrt{9+9+4}\cdot\sqrt{29}}\right| = \left|\frac{-9-12+4}{\sqrt{22}\cdot\sqrt{29}}\right| = \frac{17}{\sqrt{22}\sqrt{29}} = 0{,}673...$

$\Rightarrow \varphi = 42{,}30...^\circ \approx 42{,}3^\circ$

3a,



b, Ebene $E(B, C, S) = E_1$

$\vec{n}_{E_1} = \vec{BS} \times \vec{CS} = \begin{pmatrix}-2\\2\\6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-2\\-2\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}24\\0\\8\end{pmatrix} = 8 \cdot \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$

$E_1: \quad 3x_1 + x_3 - 12 = 0$

Ebene $E(C, D, S) = E_2$

$\vec{n}_{E_2} = \vec{CS} \times \vec{DS} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\-2\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\24\\8\end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$

$E_2: \quad 3x_2 + x_3 - 12 = 0$

$\cos\varphi = \dfrac{\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = \dfrac{1}{10} \Rightarrow \varphi = 84{,}26..^\circ \approx 84{,}3^\circ$

c, $\vec{SC} = \begin{pmatrix}2\\2\\-6\end{pmatrix} \quad \vec{SD} = \begin{pmatrix}-2\\2\\-6\end{pmatrix} \qquad \cos\varphi = \dfrac{-4+4+36}{\sqrt{4+4+36} \cdot \sqrt{44}} = \dfrac{36}{44} = \dfrac{9}{11} \Rightarrow \varphi = 35{,}1^\circ$

$\varepsilon = (180^\circ - \varphi) : 2 = 72{,}5^\circ \qquad \measuredangle CBA = 90^\circ$

d, $A_{\Delta BCS} = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix}-2\\2\\6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix}-24\\0\\-8\end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \left| \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} \right| = 4 \cdot \sqrt{9+1} = 4\sqrt{10}$

4, Kugel: $(\vec{X} - \vec{M})^2 = r^2 \Rightarrow (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 3)^2 = 25$

AB: $\vec{X} = \begin{pmatrix}6\\3\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$ in Kugelgleichung

$(6 + 3t - 1)^2 + (3 + 2t - 2)^2 + (3 - 2t - 3)^2 = 25 \iff$

$25 + 30t + 9t^2 + 1 + 4t + 4t^2 + 4t^2 = 25 \iff 17t^2 + 34t + 1 = 0$

$t_{1/2} = \frac{1}{34}\left(-34 \pm \sqrt{34^2 - 4 \cdot 17}\right) = -1 \pm \frac{8}{34}\sqrt{17} = -1 \pm \frac{4}{17}\sqrt{17}$

$\vec{S_1} = \begin{pmatrix}6\\3\\3\end{pmatrix} + \left(-1 + \frac{4}{17}\sqrt{17}\right)\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 + \frac{12}{17}\sqrt{17}\\1 + \frac{8}{17}\sqrt{17}\\5 - \frac{8}{17}\sqrt{17}\end{pmatrix}$

$\vec{S_2} = \begin{pmatrix}6\\3\\3\end{pmatrix} + \left(-1 - \frac{4}{17}\sqrt{17}\right) \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow S_2\left(3 - \frac{12}{17}\sqrt{17} \,/\, 1 - \frac{8}{17}\sqrt{17} \,/\, 5 + \frac{8}{17}\sqrt{17}\right)$

5. $E: \quad x_1 + x_2 + 5x_3 - 3 = 0 \qquad A(6/-1/5) \quad B(9/3/9)$

AB: $\vec{X} = \begin{pmatrix}6\\-1\\5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix}$

a, $\{S\} = AB \cap E$

$(6 + 3t) + (-1 + 4t) + 5 \cdot (5 + 4t) - 3 = 0 \iff$

$27 + 27t = 0 \iff t = -1 \; ; \quad \vec{S} = \begin{pmatrix}6\\-1\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix} ; \quad S(3/-5/$

b, $h: \vec{X} = \vec{A} + s \cdot \vec{n}_E \; ; \quad \{F\} = h \cap E \; ; \quad p = SF$

$h: \vec{X} = \begin{pmatrix}6\\-1\\5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}$ in E

$(6 + s) + (-1 + s) + 5 \cdot (5 + 5s) - 3 = 0 \iff 27 + 27s = 0$

$s = -1 \Rightarrow \vec{F} = \begin{pmatrix}6\\-1\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-2\\0\end{pmatrix}$

$p: \vec{X} = \begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$

c, $h \subset E$ und $h \perp p$

Richtungsvektor von h: $\quad \vec{v} = \vec{n}_E \times \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-16\\11\\1\end{pmatrix}$

$h: \vec{X} = \begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix}-16\\11\\1\end{pmatrix}$