Q12 * Mathematik m4 * Klausur am 18.02.2013

1. In 15% der bekannten Überraschungseier befinden sich Figuren mit hohem Sammlerwert.
   a) Peter kauft 10 Überraschungseier.
      Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt Peter genau zwei bzw. mehr als zwei Figuren?
   b) Wie viele Überraschungseier sollte Peter kaufen, damit die Wahrscheinlichkeit für genau zwei Figuren größer ist als die für gar keine Figur?
   c) Wie viele Überraschungseier muss Peter mindestens kaufen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% wenigstens eine Figur bekommt?

   Zu Ostern wird der Anteil an Überraschungseiern mit Figur werbewirksam auf 25% erhöht. Im Supermarkt sind die Überraschungseier mit den unterschiedlichen Figurenanteilen zwar getrennt aufgestellt, aber leider fehlt ein Hinweis, welche Eier für Ostern hergestellt wurden.

   d) Peter kauft 20 Überraschungseier aus einer Produktion und stellt die Hypothese auf, dass er die „Osterproduktion“ ausgewählt hat, wenn er mindestens 5 Figuren bekommt.
      Wie groß sind dann die Fehler erster und zweiter Art?

   Nach dem Osterfest lässt der Filialleiter des Supermarkts 100 Überraschungseier mit 15% Figurenanteil und 300 Eier mit 25% Figurenanteil vermengen.

   e) Maria kauft sich zwei Überraschungseier aus dieser „Mischung“ und bekommt dabei genau eine Figur. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt diese Figur aus der Osterproduktion?
      [Teilergebnis: $p_{\text{Figur, Mischung}} = 0{,}225$ (Prozentsatz der „Figureneier“ in der Mischung)]
   f) Hans kauft 6 Überraschungseier dieser „Mischung“.
      Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt Hans genau zwei Figuren?

2. Eine Fluggesellschaft weiß aus Erfahrung, dass ca. 10% der Fluggäste zum Essen ein Glas Tomatensaft trinken.
   a) Wie viele Gläser Tomatensaft sind dann für 200 Fluggäste erforderlich, wenn mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% kein Fluggast auf seinen Tomatensaft verzichten soll.

   Die Fluggesellschaft hat den Verdacht, dass der Anteil der Tomatensaft-Trinker auf mindestens 15% gestiegen ist, und will diesen Verdacht mit einem Signifikanztest bei 200 Fluggästen erhärten.

   b) Geben Sie die passende Nullhypothese an! Bestimmen Sie dann die Entscheidungsregel für einen Test auf dem Signifikanzniveau von 5%.
   c) Von den 200 Fluggästen haben sich 39 für einen Tomatensaft zum Essen entschieden.
      Welche Folgerung zieht die Fluggesellschaft aus dem Ergebnis des Signifikanztests?

3. Im $\mathbb{R}^3$ sind die folgenden Punkte gegeben:
   $A(5/5/-5)$, $B(1/-2/-1)$, $C(2/2/7)$ und $P(11/-1/4)$
   a) Zeigen Sie, dass man das Dreieck ABC zu einem Quadrat ABCD ergänzen kann und bestimmen Sie die Koordinaten von D.
   b) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P von der Geraden AC.
   c) Die senkrechte Projektion der Gerade AP in die x_2-x_3-Ebene liefert die Spurgerade g.
      Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g.
   d) Bestimmen Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel der Geraden g und der Geraden AP.

Aufgabe	1a	b	c	d	e	f	2a	b	c	3a	b	c	d	Summe
Punkte	3	3	4	4	4	2	3	5	1	4	4	3	4	44

Gutes Gelingen! G.R.

Q12 * Mathematik m4 * Klausur am 18.02.2013 * Lösung

1. a) $P(X=2) = B(10/0{,}15/2) = 0{,}27590 \approx 27{,}6\%$

$P(X>2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - P_{0,15}^{10}(X \le 2) = 1 - 0{,}82020 = 0{,}17980 \approx 18{,}0\%$

b) Es soll gelten $P_{0,15}^{n}(X=2) > P_{0,15}^{n}(X=0)$.

Wegen $P_{0,15}^{8}(X=2) = 0{,}23760 < 0{,}27249 = P_{0,15}^{8}(X=0)$ und

$P_{0,15}^{9}(X=2) = 0{,}25967 > 0{,}23162 = P_{0,15}^{9}(X=0)$ muss Peter also mindestens 9 Eier kaufen.

c) $P_{0,15}^{n}(X>0) \ge 95\% \Leftrightarrow 1-P_{0,15}^{n}(X=0) \ge 0{,}95 \Leftrightarrow P_{0,15}^{n}(X=0) \le 0{,}05 \Leftrightarrow 0{,}85^{n} \le 0{,}05 \Leftrightarrow$

$\ln(0{,}85^{n}) \le \ln(0{,}05) \Leftrightarrow n \cdot \ln(0{,}85) \le \ln(0{,}05) \Leftrightarrow n \ge \dfrac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}85)} = 18{,}43...$

Peter muss also mindestens 19 Überraschungseier kaufen.

d) $H_1:\ p = p_1 = 25\%$ $\quad A_1 = \{5, 6, \dots, 20\}$ und $H_2:\ p = p_2 = 15\%$ $\quad A_2 = \{0, 1, \dots, 4\}$

Fehler erster Art: $P_{0,25}^{20}(X \le 4) = 0{,}41484 \approx 41{,}5\%$

Fehler zweiter Art: $P_{0,15}^{20}(X>4) = 1 - P_{0,15}^{20}(X \le 4) = 1 - 0{,}82985 = 17{,}015\% \approx 17{,}0\%$

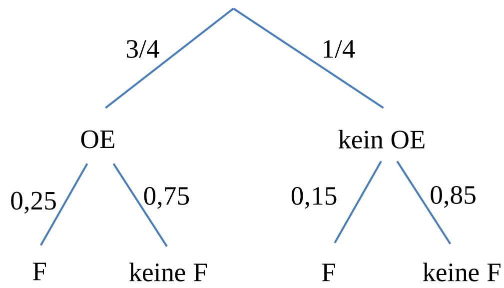
e) Anteil an Figureneiern in der Mischung:

$p_F = 0{,}75 \cdot 0{,}25 + 0{,}25 \cdot 0{,}15 = 0{,}225$

$P_{Figur}(OE) = \dfrac{P(Figur \cap OE)}{P(Figur)} =$

$\dfrac{0{,}75 \cdot 0{,}25}{0{,}225} = \dfrac{5}{6} \approx 0{,}833 = 83{,}3\%$

Das Ei mit Figur stammt mit ca. 83,3% Wahrscheinlichkeit aus der Osterproduktion.



f) $P_{0,225}^{6}(X=2) = B(6/0{,}225/2) = \binom{6}{2} \cdot 0{,}225^2 \cdot 0{,}775^4 = 0{,}273944... \approx 27{,}4\%$

2. a) Gesucht ist k mit $P_{0,10}^{200}(X \le k) \ge 95\% \Leftrightarrow k \ge 27$

Die Fluggesellschaft sollte also mindestens 27 Glas Tomatensaft vorrätig halten.

b) $H_0:\ p < 15\%$; $A = \{0, 1, \dots, k\}$ und $\overline{A} = \{k+1, \dots, 200\}$

$P_{p<0,15}^{200}(x \in \overline{A}) \le 5\% \Leftrightarrow P_{p<0,15}^{200}(X>k) \le 5\% \Leftrightarrow 1 - P_{p<0,15}^{200}(X \le k) \le 5\% \Leftrightarrow$

$P_{p<0,15}^{200}(X \le k) \ge 0{,}95 \Leftrightarrow P_{p=0,15}^{200}(X \le k) \ge 0{,}95 \Leftrightarrow k \ge 38$; wähle also $\overline{A} = \{39, \dots, 200\}$

c) Wenn sich 39 Fluggäste für ein Glas Tomatensaft entscheiden, dann kann die Fluggesellschaft die Nullhypothese ablehnen, d.h. die Fluggesellschaft geht davon aus, dass der Anteil der Tomatensaft-Trinker auf 15% angestiegen ist.

3. a) $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = 4 + 28 - 32 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$

$\left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{16+49+16} = 9$ und $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{1+16+64} = 9$, also Quadrat ABCD möglich mit

$\vec{D} = \vec{A} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$, also $D(6/9/3)$

b) Projektion $\overrightarrow{AF}$ des Vektors $\overrightarrow{AP}$ auf $\overrightarrow{AC}$ liefert

$$\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AP} \circ \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|^2} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}}{9+9+144} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{108}{162} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\vec{F} = \vec{A} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ also } F(3/3/3) \text{ und } d = \left|\overrightarrow{PF}\right| = \sqrt{(11-3)^2 + (-1-3)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{81} = 9$$

c) Projektion von A(5/5/-5) und P(11/-1/4) in die x_2-x_3-Ebene liefert $A^*(0/5/-5)$ und $P^*(0/-1/4)$.

Also $\overrightarrow{A^*P^*} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ -1-5 \\ 4-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ geschnitten mit $AP: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ liefert den

Spurpunkt von AP in der x_2-x_3-Ebene, d.h.

$0 = 5 + 2k \Rightarrow k = -2{,}5$ und Schnittpunkt $S(0/5+5/-5-7{,}5) = S(0/10/-12{,}5)$

Schnittwinkel φ

$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{4+9}{\sqrt{4+9} \cdot \sqrt{4+4+9}} = \frac{13}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{17}} \Rightarrow \varphi = 29{,}017...^\circ \approx 29{,}0^\circ$$