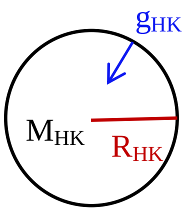
Q12 * Astrophysik * Die Masse von Himmelskörpern

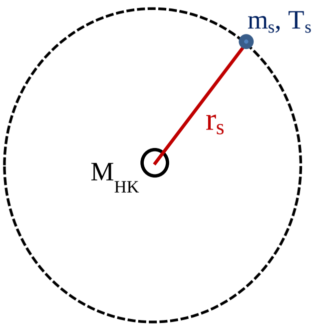
Die Masse M_{HK} eines Himmelskörpers lässt sich grundsätzlich auf zwei Arten ermitteln.

1. Von einem Himmelskörper ist der Radius R_{HK} und die Fallbeschleunigung g_{HK} an der Oberfläche bekannt. Es gilt dann für einen beliebigen Gegenstand der Masse m an der Oberfläche:



$$m \cdot g_{HK} = F_G = G^* \cdot \frac{m \cdot M_{HK}}{R_{HK}^2} \Rightarrow M_{HK} = \frac{g_{HK} \cdot R_{HK}^2}{G^*}$$

2. Ein Himmelskörper wird von einem belieben Satelliten (wie z.B. einem Mond, einem Planeten oder einem künstlichen Satelliten) auf einer Kreisbahn mit Radius r_s in der Zeit T_s umrundet. Es gilt dann



$$m_S \cdot \omega_S^2 \cdot r_S = F_Z = G^* \cdot \frac{m_S \cdot M_{HK}}{r_S^2} \Rightarrow M_{HK} = \frac{4\pi^2 \cdot r_S^3}{T_S^2 \cdot G^*}$$

Gravitationskonstante: $G^* = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$

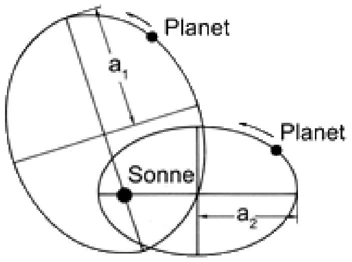
Aufgaben

1. Berechnen Sie aus der bekannten Fallbeschleunigung von $g = 9{,}8 \frac{m}{s^2}$ und dem Erdradius $R_E = 6370$ km die Masse der Erde.

2. Berechnen Sie aus dem Abstand $d_{\text{Erde-Sonne}} = 150 \cdot 10^6$ km = 1A (Astronomische Einheit) und der bekannten Umlaufdauer der Erde um die Sonne die Sonnenmasse.

3. Das 3. Gesetz von Kepler lautet:
Die Quadrate der Umlaufzeiten T zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen a dieser Planeten.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad \text{d.h.} \quad \frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = \text{konstant} = K$$



Zeigen Sie, dass für die Konstante K gilt:

$$K = \frac{4\pi^2}{G^* \cdot M_{Sonne}}$$

Q12 * Astrophysik * Die Masse von Himmelskörpern * Lösungen

1. $m \cdot g_{Erde} = F_G = G^* \cdot \frac{m \cdot M_{Erde}}{{R_{Erde}}^2} \Rightarrow$

$$M_{Erde} = \frac{g_{Erde} \cdot {R_{Erde}}^2}{G^*} = \frac{9{,}8\,\frac{m}{s^2} \cdot (6370 \cdot 10^3\,m)^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg \cdot s^2}} = 5{,}961... \cdot 10^{24}\,kg \approx 6{,}0 \cdot 10^{24}\,kg$$

2. $m_S \cdot {\omega_S}^2 \cdot r_S = F_Z = G^* \cdot \frac{m_S \cdot M_{HK}}{{r_S}^2} \Rightarrow (\frac{2\pi}{T_S})^2 \cdot {r_S}^3 = G^* \cdot M_{HK} \Rightarrow M_{HK} = \frac{4\pi^2 \cdot {r_S}^3}{{T_S}^2 \cdot G^*}$

$$M_{Sonne} = \frac{4\pi^2 \cdot {r_{Erde}}^3}{{T_{Erde}}^2 \cdot G^*} = \frac{4\pi^2 \cdot (150 \cdot 10^9\,m)^3}{(365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600\,s)^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg \cdot s^2}} \approx 2{,}0 \cdot 10^{30}\,kg$$

3. $m_{Planet} \cdot {\omega_{Planet}}^2 \cdot r_{S_{Planet}} = F_Z = G^* \cdot \frac{m_{Planet} \cdot M_{Sonne}}{{r_{Planet}}^2} \Rightarrow (\frac{2\pi}{T_{Pl}})^2 \cdot {r_{Pl}}^3 = G^* \cdot M_{Sonne} \Rightarrow$

$$\frac{4\pi^2 \cdot {r_{Pl}}^3}{{T_{Pl}}^2} = G^* \cdot M_{Sonne} \Rightarrow \frac{{r_{Pl}}^3}{{T_{Pl}}^2} = \frac{G^* \cdot M_{Sonne}}{4\pi^2} \Rightarrow \frac{{T_{Pl}}^2}{{r_{Pl}}^3} = \frac{4\pi^2}{G^* \cdot M_{Sonne}} \quad (\text{und } r_{Pl} \mathrel{\hat{=}} a_{Pl})$$