Q12 * Astrophysik * 1. Extemporale aus der Physik * 3.12.2012

Ein Satellit soll in eine geostationäre Bahn (d.h. Umlaufdauer T = 24,0 h) gebracht werden.
Zunächst positioniert man den Satellit in einer kreisförmigen, niedrigen Umlaufbahn, 330 km über der Erdoberfläche (Erdradius $r_E = 6370$ km).
Durch eine kurzzeitige Zündung des Triebwerks wird der Satellit dann auf einer Hohmannbahn zum erdfernsten Punkt (dem Apogäum) dieser Ellipse in einer Entfernung von 42300 km über dem Erdmittelpunkt gebracht.
Hier zündet man erneut das Triebwerk, so dass der Satellit nun auf eine kreisförmige Bahn mit dem erforderlichen Radius von etwa 42300 km einschwenkt (siehe Bild!).

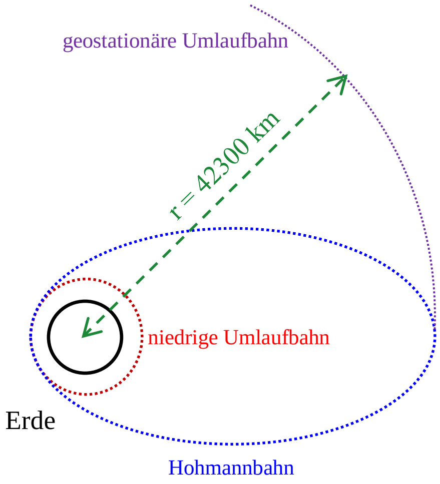

Bild nicht maßstäblich!

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Satelliten in der erdnahen, niedrigen Umlaufbahn. Wie lange dauert damit ein Umlauf?

[Ergebnisse: $v_1 = 7{,}72\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$; $T_1 = 90{,}9\,\text{min}$]

b) Zeigen Sie, dass die Kreisbahn eines geostationären Satelliten (d.h. T = 24h) den Radius $42{,}3 \cdot 10^3$ km hat.

c) Bestimmen Sie die große Halbachse der angegebenen Hohmannbahn.
Um wie viele km/s muss die Geschwindigkeit des Satelliten vergrößert werden, damit er von der niedrigen Umlaufbahn in die Hohmannbahn einschwenkt?

d) Muss der Satellit im erdfernsten Punkt seiner Hohmannbahn abgebremst oder beschleunigt werden, damit er in die kreisförmige Umlaufbahn des geostationären Satelliten kommt? Geben Sie nur eine kurze Begründung ohne Rechnung!

e) Wie lange dauert der Flug des Satelliten vom Start aus der niedrigen Umlaufbahn bis zum Einschwenken in die kreisförmige geostationäre Umlaufbahn?
(Hinweis: Verwenden Sie Daten aus Aufgabe a))

Astronomische Daten:

Gravitationskonstante: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{s}^2}$

Erdradius: $r_E = 6370\,\text{km}$; Erdmasse: $M_E = 5{,}98 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$

Aufgabe	a	b	c	d	e	Summe
Punkte	5	4	5	2	5	21

Gutes Gelingen! G.R.

Q12 * Astrophysik * 1. Extemporale aus der Physik * 3.12.2012 * Lösung

a) $$\frac{m\cdot v^2}{r} = \frac{G\cdot m\cdot M_E}{r^2} \quad \text{und} \quad r = r_E + 330\text{km} = 6370\text{km} + 330\text{km} = 6700\,\text{km} = r_1 \quad \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{G\cdot M_E}{r_1}} = \sqrt{\frac{6,67\cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\cdot s^2}\cdot 5,98\cdot 10^{24}\,kg}{6,70\cdot 10^6\,m}} = 7,72\cdot 10^3\,\frac{m}{s} = 7,72\,\frac{km}{s}$$

$$v_1 = \frac{2\cdot\pi\cdot r_1}{T_1} \quad\Rightarrow\quad T_1 = \frac{2\cdot\pi\cdot r_1}{v_1} = \frac{2\cdot\pi\cdot 6,70\cdot 10^6\,m}{7,72\cdot 10^3\,\frac{m}{s}} = 5453,...s \approx 90,9\,\text{min}$$

b) $$m\cdot\omega_2{}^2\cdot r_2 = \frac{G\cdot m\cdot M_E}{r_2{}^2} \quad\Rightarrow\quad r_2{}^3 = \frac{G\cdot M_E}{\omega^2} \quad\Rightarrow\quad r_2 = \sqrt[3]{\frac{G\cdot M_E\cdot T^2}{(2\pi)^2}} =$$

$$\sqrt[3]{\frac{6,67\cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\cdot s^2}\cdot 5,98\cdot 10^{24}\,kg\cdot(24\cdot 3600s)^2}{(2\pi)^2}} = 42,3\cdot 10^6\,m$$

c) $$a = \frac{1}{2}\cdot(r_1 + r_2) = \frac{1}{2}\cdot(6700\text{km} + 42300\,\text{km}) = 24,5\cdot 10^6\,m$$

$$v = \sqrt{G\cdot M_E\cdot\left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{6,67\cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\cdot s^2}\cdot 5,98\cdot 10^{24}\,kg\cdot\left(\frac{2}{6,7\cdot 10^6\,m} - \frac{1}{24,5\cdot 10^6\,m}\right)} =$$

$$10,1\cdot 10^3\,\frac{m}{s} = 10,1\,\frac{km}{s} \quad \text{und} \quad \Delta v = 10,1\,\frac{km}{s} - 7,72\,\frac{km}{s} \approx 2,4\,\frac{km}{s}$$

d) Die Geschwindigkeit muss erneut erhöht werden, denn die potentielle Energie auf der kreisförmigen geostationären Umlaufbahn ist größer als die potentielle auf der ellipsenförmigen Hohmannbahn.

e) $$T_{Flug} = \frac{1}{2}\cdot T_{Hohmann} \quad \text{und} \quad \frac{T_{Hohmann}{}^2}{a^3} = \frac{T_1{}^2}{r_1{}^3} \quad\Rightarrow$$

$$T_{Hohmann} = T_1\cdot\sqrt{\left(\frac{a}{r_1}\right)^3} = 90,0\,\text{min}\cdot\sqrt{\left(\frac{24,5}{6,70}\right)^3} = 636\,\text{min} \approx 10,6\,h \quad \text{also}$$

$$T_{Flug} = \frac{1}{2}\cdot 10,6h = 5,3h$$