**Q12 * Mathematik * Aufgaben zur Integralrechnung (Wiederholung)**

1. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale!
   Achten Sie auf korrekte mathematische Form.

   Beispiel: $\int_1^3 \frac{2}{3x^2}\,dx = \int_1^3 \frac{2}{3}\cdot x^{-2}\,dx = = \left[\frac{2}{3}\cdot\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^3 = \left[-\frac{2}{3x}\right]_1^3 = -\frac{2}{9}-(-\frac{2}{3}) = \frac{4}{9}$

   a) $\int_1^2 2x^2-3\,dx$ b) $\int_0^4 3\cdot\sqrt{2x}\,dx$ c) $\int_1^4 \frac{4}{\sqrt{2x}}\,dx$

   d) $\int_{-2}^{-1} \frac{3}{x-2}\,dx$ e) $\int_0^3 \frac{3x}{1+x^2}\,dx$ f) $\int_{-2}^{2} 2\cdot\cos(\pi\cdot x)\,dx$

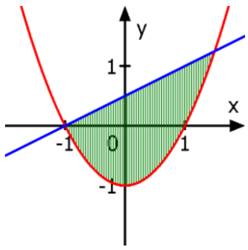
2. Bestimmen Sie alle $k \in R$, so dass die angegebene Gleichung gilt.
   Interpretieren Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe einer passenden Skizze.

   a) $\int_1^k 2-x\,dx = 0$ b) $\int_1^k 2-x\,dx = -1{,}5$

   c) $\int_0^k 4-x^2\,dx = 0$ d) $\int_0^k 4-x^2\,dx = \frac{11}{3}$

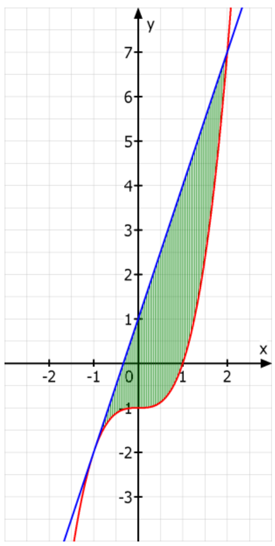
3. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2-1$.
   Die Normale im Punkt (-1/0) des Graphen von f begrenzt mit $G_f$ eine Fläche mit dem Inhalt A.

   Berechnen Sie diesen Flächeninhalt A.




4. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3-1$
   Die Tangente an $G_f$ im Punkt P(-1/-2) schließt mit $G_f$ eine Fläche mit dem Inhalt A ein.

   Berechnen Sie diesen Flächeninhalt A.
   (Siehe Bild!)



## Q12 * Mathematik * Aufgaben zur Integralrechnung (Wiederholung) * Lösungen

1. a) $\displaystyle\int_1^2 2x^2-3\,dx = \left[\frac{2x^3}{3} - 3x\right]_1^2 = (\frac{16}{3}-6) - (\frac{2}{3}-3) = \frac{5}{3}$

   b) $\displaystyle\int_0^4 3\cdot\sqrt{2x}\,dx = \int_0^4 3\cdot\sqrt{2}\cdot x^{1/2}\,dx = \left[3\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{x^{1,5}}{1,5}\right]_0^4 = 2\cdot\sqrt{2}\cdot 8 - 0 = 16\sqrt{2}$

   c) $\displaystyle\int_1^4 \frac{4}{\sqrt{2x}}\,dx = \int_1^4 2\cdot\sqrt{2}\cdot x^{-0,5}\,dx = \left[2\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{x^{0,5}}{0,5}\right]_1^4 = 4\sqrt{2}\cdot 2 - 4\sqrt{2}\cdot 1 = 4\sqrt{2}$

   d) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{3}{x-2}\,dx = \left[\,3\cdot\ln(|x-2|)\,\right]_{-2}^{-1} = 3\ln 3 - 3\ln 4 = 3\ln\frac{3}{4} \approx -0,863$

   e) $\displaystyle\int_0^3 \frac{3x}{1+x^2}dx = \int_0^3 \frac{3}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}dx = \left[\frac{3}{2}\cdot\ln(1+x^2)\right]_0^3 = \frac{3}{2}\cdot\ln(10) - \frac{3}{2}\cdot\ln(1) =$

   $\displaystyle\frac{3}{2}\cdot\ln(10) \approx 3,45$

   f) $\displaystyle\int_{-2}^{2} 2\cdot\cos(\pi\cdot x)\,dx = \left[\frac{2}{\pi}\cdot\sin(\pi\cdot x)\right]_{-2}^{2} = 0 - 0 = 0$

2. a) $\displaystyle\int_1^k 2 - x\,dx = 0 \Leftrightarrow \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^k = 0 \Leftrightarrow 2k - 0,5k^2 - (2-0,5) = 0 \Leftrightarrow$

   $\displaystyle k^2 - 4k + 3 = 0 \Leftrightarrow k_{1/2} = \frac{1}{2}\cdot(4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 3}) = 2 \pm 1 \Leftrightarrow k_1 = 1\,;\ k_2 = 3$

   b) $\displaystyle\int_1^k 2 - x\,dx = -1,5 \Leftrightarrow \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^k = -1,5 \Leftrightarrow 2k - 0,5k^2 - (2-0,5) = -1,5 \Leftrightarrow$

   $-k^2 + 4k - 3 = -3 \Leftrightarrow -k^2 + 4k = 0 \Leftrightarrow k_1 = 0\,;\ k_2 = 4$

   c) $\displaystyle\int_0^k 4 - x^2\,dx = 0 \Leftrightarrow \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^k = 0 \Leftrightarrow 4k - \frac{k^3}{3} - 0 = 0 \Leftrightarrow \frac{k}{3}\cdot(12-k^2) = 0 \Leftrightarrow$

   $\displaystyle\frac{k}{3}\cdot(12-k^2) = 0 \Leftrightarrow k_1 = 0\ ;\ \ k_{2/3} = \pm\,2\sqrt{3}$

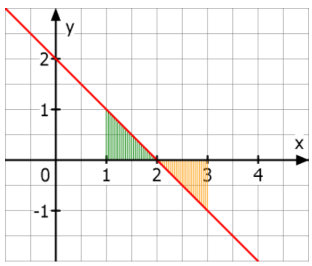
   d) $\displaystyle\int_0^k 4 - x^2\,dx = \frac{11}{3} \Leftrightarrow \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^k = \frac{11}{3} \Leftrightarrow 4k - \frac{k^3}{3} - 0 = \frac{11}{3} \Leftrightarrow k^3 - 12k + 11 = 0$

   Die Lösung $x_1 = 1$ findet man durch Ausprobieren, also

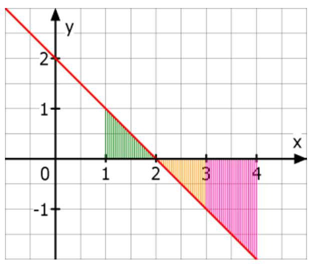
   $k^3 - 12k + 11 = 0 \Leftrightarrow (k-1)\cdot(k^2 + k - 11) = 0 \Leftrightarrow$

   $\displaystyle k_1 = 1\,;\ k_{2/3} = \frac{-1\pm\sqrt{1+44}}{2} \Leftrightarrow k_1 = 1\,;\ k_{2/3} = \frac{-1 \pm 3\cdot\sqrt{5}}{2}\ ;\ k_2 \approx 2.85\ ;\ k_3 \approx -3,85$

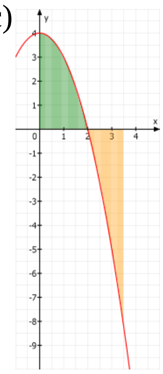
Einzelne Bilder zu a)



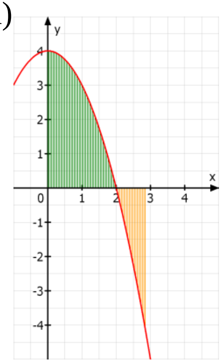

b)




c)



d)



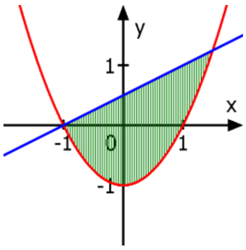
3. $f(x) = x^2 - 1$ und $f'(x) = 2x \Rightarrow f'(-1) = -2$ also $m_{Normale} = +0{,}5$

Normalengleichung: $g(x) = 0{,}5x + t$ mit $(-1/0)$ eingesetzt: $t = 0{,}5$
also $g(x) = 0{,}5x + 0{,}5$

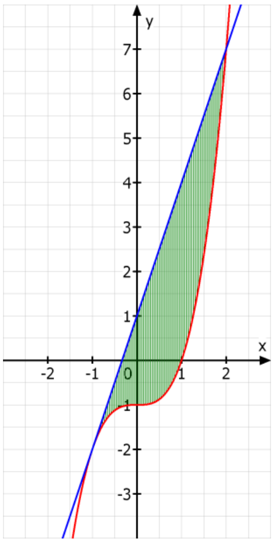
Schnittpunkte:
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0{,}5x + 0{,}5 \Leftrightarrow x^2 - 0{,}5x - 1{,}5 = 0 \Leftrightarrow (x+1)\cdot(x-1{,}5) = 0$
also $S_1(-1/0)$ und $S_2(1{,}5/1{,}25)$
Flächeninhalt A:

$$A = \int_{-1}^{1,5} g(x) - f(x)\,dx = \int_{-1}^{1,5} 0{,}5x + 0{,}5 - (x^2 - 1)\,dx = \int_{-1}^{1,5} -x^2 + 0{,}5x + 1{,}5\,dx =$$

$$\int_{-1}^{1,5} -x^2 + 0{,}5x + 1{,}5\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + 1{,}5x\right]_{-1}^{1,5} = \frac{27}{16} - \left(-\frac{11}{12}\right) = \frac{125}{48} \approx 2{,}6$$




4. $f(x) = x^3 - 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$ und $f'(-1) = 3 = m_{Tangente}$
Tangentengleichung
$g(x) = 3x + t$ mit $(-1/-2)$ eingesetzt $\Rightarrow t = 1$ und
$g(x) = 3x + 1$
Schnittpunkte:
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 - 1 = 3x + 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow$
$x^3 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)\cdot(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow$
$(x+1)^2 \cdot (x-2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1\ ;\ x_2 = 2$
Der zweite Schnittpunkt lautet also S(2/7).




$$A = \int_{-1}^{2} g(x) - f(x)\,dx = \int_{-1}^{2} 3x + 1 - (x^3 - 1)\,dx =$$

$$\int_{-1}^{2} -x^3 + 3x + 2\,dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} = 6 - \left(-\frac{3}{4}\right) = 6{,}75$$