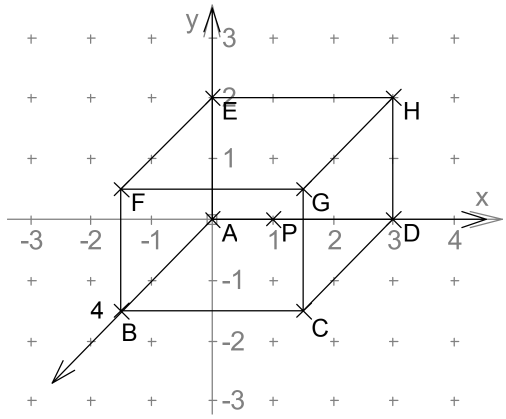
1. Stegreifaufgabe aus der Mathematik * Q12 / 2. Halbjahr * m3 * 06.04.2016

1. Beim Quader ABCDEFGH verlaufen die Kanten parallel zu den Koordinatenachsen (siehe Bild).
   Durch A(0/0/0) und G(4/3/2) sind damit alle Koordinaten der Eckpunkte festgelegt. Zudem gilt P(0/1/0).



   a) Die Punkte B, D und E legen die Ebene E_1 fest. Bestimmen Sie die Gleichung dieser Ebene E_1 in Koordinatenform.

   b) Die Gerade PF schneidet die Ebene E_1 im Punkt S. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S.

   c) Bestimmen Sie den Schnittwinkel zwischen der Geraden PF und der Ebene E_1.

   d) Paralleles Licht fällt unter der Richtung $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ auf die Ebene E_1. Die Gerade FP wirft dabei einen Schatten auf die Ebene E_1, der einer Halbgeraden entspricht. Bestimmen Sie die Gleichung dieser Halbgeraden.

2. Die Punkte A(1/-3/2), B(4/-1/0) und C(0/1/5) legen eine Ebene E fest.
   M(7/-1/6) ist der Mittelpunkt einer Kugel k, die diese Ebene E im Punkt P berührt.
   (Man sagt, E ist eine Tangentialebene der Kugel.)

   a) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene E in Koordinatenform.

   b) Berechnen Sie den Radius der Kugel k und die Koordinaten des Berührpunktes P.

   c) Es gibt unendlich viele Geraden g, die die Kugel k berühren und parallel zur Ebene E verlaufen, aber nicht in E liegen.
      Geben Sie die Gleichung einer dieser Geraden an.

Aufgabe	1a	b	c	d	2a	b	c	Summe
Punkte	4	5	5	7	4	6	5	36

Gutes Gelingen! G.R.

1. Stegreifaufgabe aus der Mathematik * Q12 / 2. Halbjahr * m3 * 06.04.2016 * Lösungen

1. a) B(4/0/0), D(0/3/0) und E(0/0/2) mit der Achsenabschnittsform lautet damit die Gleichung für E_1

$$\frac{x_1}{4}+\frac{x_2}{3}+\frac{x_3}{2}=1 \quad \text{also} \quad E_1:\ 3x_1+4x_2+6x_3=12$$

b) Gerade PF: $\vec{X}=\vec{P}+r\cdot\overrightarrow{PF}$ also $\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}$ und $PF\cap E_1=\{S\}$ durch Einsetzen:

$3\cdot 4r+4\cdot(1-r)+6\cdot 2r=12 \Leftrightarrow 20r=8 \Leftrightarrow r=0{,}4$ und

$S(4\cdot 0{,}4/1-0{,}4/2\cdot 0{,}4)=S(1{,}6/0{,}6/0{,}8)$

c) Normalenvektor von E_1: $\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\4\\6\end{pmatrix}$ und Richtungsvektor von PF: $\vec{v}=\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}$ also

$$\sin(\varphi)=\left|\frac{\vec{n}\circ\vec{v}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{v}|}\right|=\frac{|3\cdot4-4\cdot1+6\cdot2|}{\sqrt{9+16+36}\cdot\sqrt{16+1+4}}=\frac{20}{\sqrt{61}\cdot\sqrt{21}}=0{,}55879...\Rightarrow \varphi=33{,}972...^\circ\approx 34{,}0^\circ$$

d) Suche einen weiteren Punkt T auf dieser Halbgeraden. $\{T\}=h\cap E_1$ mit

$h:\ \vec{X}=\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-2\\-1\\-5\end{pmatrix}$ eingesetzt in E_1: $3\cdot(4-2s)+4\cdot(-s)+6\cdot(2-5s)=12 \Leftrightarrow$

$3\cdot(4-2s)+4\cdot(-s)+6\cdot(2-5s)=12 \Leftrightarrow 24-40s=12 \Leftrightarrow s=\frac{12}{40}=0{,}3$ also

$T(4-2\cdot0{,}3/0-0{,}3/2-5\cdot0{,}3)=T(3{,}4/-0{,}3/0{,}5)$ und die Halbgerade lautet

$$p:\ \vec{X}=\vec{S}+k\cdot\overrightarrow{ST} \text{ mit } k\in\mathbb{R}_o^+ \text{ also } \vec{X}=\begin{pmatrix}1{,}6\\0{,}6\\0{,}8\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}1{,}8\\-0{,}9\\-0{,}3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}6\\0{,}6\\0{,}8\end{pmatrix}+k^*\cdot\begin{pmatrix}6\\-3\\-1\end{pmatrix} \text{ mit } k^*\in\mathbb{R}_o^+$$

2.a) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}4-1\\-1+3\\0-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0-1\\1+3\\5-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\4\\3\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_E}=\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\-7\\14\end{pmatrix}=7\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

$E:\ \left(\vec{X}-\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}=0$ also $E:\ 2x_1-x_2+2x_3-9=0$ und $E_{HNF}:\ \frac{1}{3}\cdot(2x_1-x_2+2x_3-9)=0$

b) $r = |d(M;E)|$ und $d(M;E) = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot 7 - (-1) + 2 \cdot 6 - 9) = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot 7 - (-1) + 2 \cdot 6 - 9) = 6$ also $r = 6$

M liegt im Halbraum ohne Ursprung, daher $\vec{P} = \vec{M} - 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-4 \\ -1+2 \\ 6-4 \end{pmatrix}$ also $P(3/1/2)$

c) Punkt $R \in g$ mit $\vec{R} = \vec{M} + 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+4 \\ -1-2 \\ 6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}$ ist der geeignetste Berührpunkt.

Der Richtungsvektor von g muss dann nur erfüllen $\vec{v} \perp \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, also z.B. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

also $g\colon\ \vec{X} = \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$