Q12 * Mathematik * Streifenmethode

Für die folgenden Aufgaben dürfen die angegebenen Formeln verwendet werden.

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Streifenmethode die folgenden bestimmten Integrale.
Sie dürfen dabei nur den Grenzwert der Ober- bzw. der Untersumme bestimmen.
Kennzeichnen Sie den zugehörigen Flächeninhalt in einem passenden Diagramm.
In welchen Fällen ist die Berechnung des bestimmten Integrals auch ohne Streifenmethode möglich?

1. $A_1 = \int\limits_0^3 0{,}5\,x\ dx$

2. $A_2 = \int\limits_0^3 1 + 0{,}5\,x\ dx$

3. $A_3 = \int\limits_0^3 0{,}25\,x^2\,dx$

4. $A_4 = \int\limits_2^3 0{,}25\,x^2\,dx$

5. $A_5 = \int\limits_0^2 0{,}25\,x^3\,dx$

6. $A_6 = \int\limits_1^2 0{,}25\,x^3\,dx$

Für Experten:
Zeigen Sie mit Hilfe der Streifenmethode die Gültigkeit folgender Formeln ($0 < a < b$) :

$$\int\limits_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} \quad \text{und} \quad \int\limits_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

Q12 * Mathematik * Streifenmethode * Lösungen

1. $A_1 = \int_0^3 0{,}5x\, dx\ ;\ \Delta x = \frac{3}{n}\ ;\ x_o = 0;\ x_i = \Delta x \cdot i\ ;\ x_n = 3$

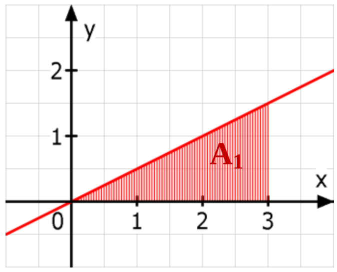
Obersumme: $O_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x \cdot f(x_n) =$

$\Delta x \cdot (0{,}5 \cdot \Delta x \cdot 1 + \ldots + 0{,}5 \cdot \Delta x \cdot n) = 0{,}5 \cdot \Delta x \cdot \Delta x \cdot (1+2+\ldots+n) = 0{,}5 \cdot \frac{3 \cdot 3}{n \cdot n} \cdot \frac{n\cdot(n+1)}{2} =$

$0{,}5 \cdot \frac{3\cdot 3}{n \cdot n} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{9}{4} \cdot \frac{n^2+n}{n^2} = \frac{9}{4} \cdot (1+\frac{1}{n})$ und $A_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{9}{4} \cdot (1+\frac{1}{n}) = \frac{9}{4} \cdot (1+0) = \frac{9}{4}$

A_1 lässt sich auch als Dreiecksfläche einfacher berechnen:

$A_1 = \frac{1}{2} \cdot (3-0) \cdot 1{,}5 = 2{,}25 = \frac{9}{4}$



2. $A_2 = \int_0^3 1 + 0{,}5x\, dx\ ;\ \Delta x = \frac{3}{n}\ ;\ x_o = 0;\ x_i = \Delta x \cdot i\ ;\ x_n = 3$

Obersumme: $O_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x \cdot f(x_n) =$

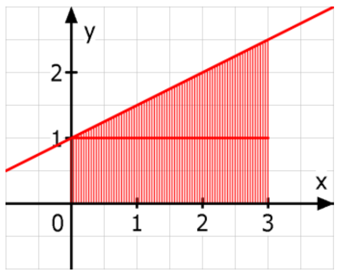
$\Delta x \cdot ((1+0{,}5 \cdot \Delta x \cdot 1) + \ldots + (1+0{,}5 \cdot \Delta x \cdot n)) = n \cdot \Delta x + 0{,}5 \cdot \Delta x \cdot \Delta x \cdot (1+2+\ldots+n) =$

$n \cdot \frac{3}{n} + 0{,}5 \cdot \frac{3\cdot 3}{n \cdot n} \cdot \frac{n\cdot(n+1)}{2} = 3 + \frac{9}{4} \cdot \frac{n^2+n}{n^2} = 3 + \frac{9}{4} \cdot (1+\frac{1}{n})\ ;$

$A_2 = \lim\limits_{n\to\infty} \left[3 + \frac{9}{4} \cdot (1+\frac{1}{n})\right] = 3 + \frac{9}{4} \cdot (1+0) = \frac{21}{4}$

A_2 lässt sich auch einfacher berechnen (siehe Bild):

$A_2 = 1 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1{,}5 = 5{,}25 = \frac{21}{4}$



3. $A_3 = \int_0^3 0{,}25x^2\, dx\ ;\ \Delta x = \frac{3}{n}\ ;\ x_o = 0;\ x_i = \Delta x \cdot i\ ;\ x_n = 3$

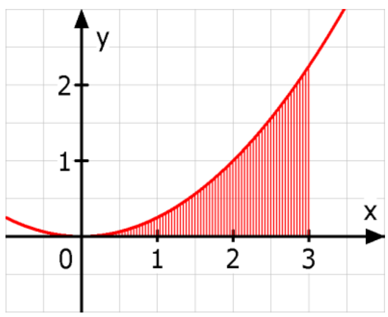
Obersumme: $O_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x \cdot f(x_n) =$

$\Delta x \cdot (0{,}25 \cdot (\Delta x \cdot 1)^2 + \ldots + 0{,}25 \cdot (\Delta x \cdot n)^2) = 0{,}25 \cdot \Delta x \cdot (\Delta x)^2 \cdot (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) =$

$0{,}25 \cdot \frac{3\cdot 3\cdot 3}{n \cdot n \cdot n} \cdot \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} = \frac{1}{4} \cdot \frac{27}{n^3} \cdot \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{9}{8} \cdot (2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2})$

$A_3 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{9}{8} \cdot (2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}) = \frac{9}{8} \cdot (2+0+0) = \frac{9}{4}$

A_3 lässt sich nur mit Hilfe der Streifenmethode berechnen.



4. $A_4=\int_2^3 0,25x^2\ dx$; $\Delta x=\frac{3-2}{n}=\frac{1}{n}$; $x_o=2$; $x_i=2+\Delta x\cdot i=2+\frac{1}{n}\cdot i$; $x_n=3$

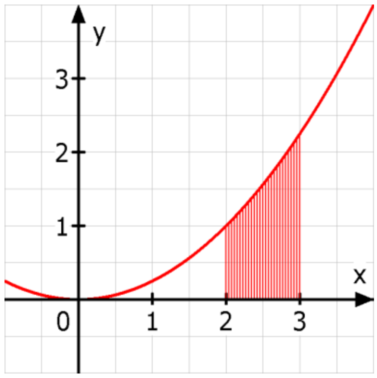
Obersumme: $O_n=\Delta x\cdot f(x_1)+\Delta x\cdot f(x_2)+...+\Delta x\cdot f(x_n)=$

$\Delta x\cdot((0,25\cdot(2+\frac{1}{n}\cdot 1)^2)+...+(0,25\cdot(2+\frac{1}{n}\cdot n)^2))=$

$\Delta x\cdot 0,25[(4+\frac{4}{n}\cdot 1+\frac{1}{n^2}\cdot 1^2)+(4+\frac{4}{n}\cdot 2+\frac{1}{n^2}\cdot 2^2)...+(4+\frac{4}{n}\cdot n+\frac{1}{n^2}\cdot n^2)]=$

$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{4}[n\cdot 4+\frac{4}{n}\cdot(1+2+...+n)+\frac{1}{n^2}\cdot(1^2+2^2+...+n^2)]=$

$1+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}+\frac{1}{4\cdot n^3}\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}=1+\frac{n^2+n}{2n^2}+\frac{2n^3+3n^2+n}{4\cdot n^3\cdot 6}$



$A_4=\lim\limits_{n\to\infty}[1+\frac{n^2+n}{2n^2}+\frac{2n^3+3n^2+n}{4\cdot n^3\cdot 6}]=$

$1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4\cdot 6}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\frac{19}{12}$

Etwas einfacher geht es unter Verwendung von A_3 :

$A_4=\int_2^3 0,25x^2\ dx=\int_0^3 0,25x^2\ dx-\int_0^2 0,25x^2\ dx=$

$\frac{9}{4}-\lim\limits_{n\to\infty}0,25\cdot\frac{2\cdot2\cdot2}{n\cdot n\cdot n}\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}=\frac{9}{4}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^3}\cdot\frac{2n^3+3n^2+n}{6}=\frac{9}{4}-\frac{2}{3}=\frac{19}{12}$

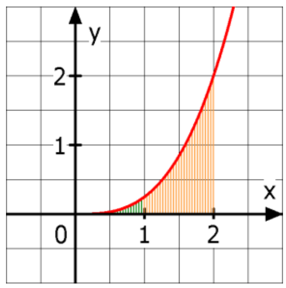
5. $A_5=\int_0^2 0,25x^3\ dx$; $\Delta x=\frac{2}{n}$; $x_o=0$; $x_i=\Delta x\cdot i$; $x_n=2$

Obersumme: $O_n=\Delta x\cdot f(x_1)+\Delta x\cdot f(x_2)+...+\Delta x\cdot f(x_n)=$

$\Delta x\cdot(0,25\cdot(\Delta x\cdot 1)^3+...+0,25\cdot(\Delta x\cdot n)^3)=0,25\cdot\Delta x\cdot(\Delta x)^3\cdot(1^3+2^3+...+n^3)=$

$0,25\cdot\frac{2\cdot2\cdot2\cdot2}{n\cdot n\cdot n\cdot n}\cdot\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}=\frac{(n+1)^2}{n^2}=\frac{n^2+2n+1}{n^2}=1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}$

$A_5=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})=1+0+0=1$



6. $A_6=\int_1^2 0,25x^3\ dx=\int_0^2 0,25x^3\ dx-\int_0^1 0,25x^3\ dx=1-\int_0^1 0,25x^3\ dx$

mit $\int_0^1 0,25x^3\ dx=\lim\limits_{n\to\infty}\left(0,25\cdot\frac{1\cdot1\cdot1\cdot1}{n\cdot n\cdot n\cdot n}\cdot\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4\cdot n\cdot n}\cdot\frac{(n+1)^2}{4}\right)=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4\cdot n\cdot n}\cdot\frac{n^2+2n+1}{4}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{16}\cdot(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})\right)=\frac{1}{16}$ also

$A_6=1-\int_0^1 0,25x^3\ dx=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}=0,9375$

Q12 * Mathematik * Streifenmethode

Expertenaufgabe:

$$\int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} \quad ; \quad \Delta x = \frac{b}{n} \;;\; x_o = 0\,,\; x_i = \Delta x \cdot i = \frac{b}{n}\cdot i\,,\; x_n = \Delta x \cdot n = \frac{b}{n}\cdot n = b$$

Obersumme $O_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x \cdot f(x_n) =$

$$\Delta x \cdot [(\frac{b}{n}\cdot 1)^2 + (\frac{b}{n}\cdot 2)^2 + \ldots + (\frac{b}{n}\cdot n)^2] = \frac{b}{n}\cdot(\frac{b}{n})^2 \cdot [1^2 + 2^2 + \ldots + n^2] =$$

$$\frac{b}{n}\cdot(\frac{b}{n})^2 \cdot [\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}] = \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{b^3}{6}\cdot[2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}]$$

Und damit $\displaystyle\int_0^b x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{6}\cdot[2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}] = \frac{b^3}{6}\cdot[2+0+0] = \frac{b^3}{3}$

$$\int_a^b x^2\,dx = \int_0^b x^2\,dx - \int_0^a x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

Z.B. $\displaystyle\int_1^2 x^2\,dx = \int_0^2 x^2\,dx - \int_0^1 x^2\,dx = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3}$

$$\frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \approx 2{,}33$$