## Q12 * Mathematik * Übungsaufgaben zur 1. Klausur

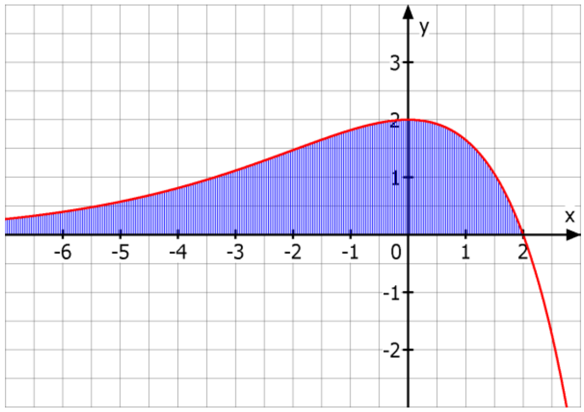
1. Gegeben ist die Kurvenschar mit $f_k(x) = (k - x) \cdot e^{0,5x}$ mit $k > 0$.
   Der Graph von $f_k$ wird im Folgenden mit $G_k$ bezeichnet.

   a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von $f_k$ in Abhängigkeit von $k$.
   Bestimmen Sie das Verhalten von $f_k(x)$ an den Grenzen des Definitionsbereichs. (Es darf $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n \cdot e^x = 0^+$ (für $n \in \mathbb{N}$) verwendet werden.)

   b) Zeigen Sie, dass $G_k$ keinen Tiefpunkt aber genau einen Hochpunkt besitzt.
   Bestimmen Sie die Koordinaten des Hochpunktes.
   Auf welcher Kurve liegen alle Hochpunkte der Schar?

   c) Zeigen Sie, dass $G_k$ genau einen Wendepunkt hat.
   Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes.
   Auf welcher Kurve liegen alle Wendepunkte der Schar?

   d) Der Graph $G_k$ schließt mit der x-Achse eine sich ins (negativ) Unendliche erstreckende Fläche ein.
   Bestimmen Sie den endlichen Inhalt $A_k$ dieser Fläche in Abhängigkeit von $k$.
   (Hinweis: $F_k(x) = (ax + b) \cdot e^{0,5x}$ ist für passendes a und b eine Stammfkt.)

   e) Das Bild zeigt einen Graphen der Schar.
   Welchen Wert hat das zugehörige k?
   Wie groß ist der Inhalt der schraffierten Fläche?

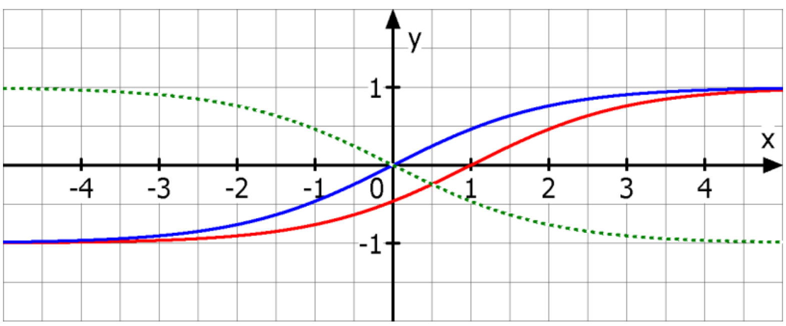
2. Gegeben ist die Kurvenschar mit $g_k(x) = \dfrac{e^x - k}{e^x + k}$ mit $k > 0$.

   a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von $g_k$ und untersuchen Sie das Verhalten von $g_k(x)$ an den Stellen des Definitionsbereichs.

   b) Begründen Sie, dass alle Funktionen der Schar streng monoton steigend sind.

   c) Zeigen Sie, dass alle Funktionen der Schar genau einen Wendepunkt besitzen.
   Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes in Abhängigkeit von $k$.
   Auf welcher Kurve liegen diese Wendepunkte der Schar?

   d) Das Bild zeigt zwei Graphen der Schar und gestrichelt eine weitere Kurve.
   Geben Sie die zughörigen k-Werte zum blauen und roten Graphen an!
   Wie lautet die Funktionsgleichung zur gestrichelten Kurve?




**Q12 * Mathematik m6 * Übungsaufgaben zur 1. Klausur * Lösungen**

1. a) NSt.: $f_k(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = k$

$\lim\limits_{x\to\infty} f_k(x) = "-\infty\cdot\infty" = -\infty$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} [k\cdot e^{0,5x} - (x^2\cdot e^x)^{0,5}] = "0 - 0^{0,5}" = 0$

b) $f_k'(x) = (0,5k - 1 - 0,5x)\cdot e^{0,5x}$ und $f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow x_2 = k-2$ ; $y_2 = 2\cdot e^{0,5k-1}$

$f_k'(x)$ ändert bei $x_2$ das Vorzeichen von + auf - , also HOP($x_2$/$y_2$).

Kurve der HOP: $h(x) = 2\cdot e^{0,5x}$ mit $x \in ]-2;\infty[$

c) $f_k''(x) = (0,25k - 1 - 0,25x)\cdot e^{0,5x}$ und $f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow x_3 = k-4$ ; $y_3 = 4\cdot e^{0,5k-2}$

Kurve der WP: $w(x) = 4\cdot e^{0,5x}$ mit $x \in ]-4;\infty[$

d) Der Probeansatz liefert durch Koeffizientenvergleich die Stammfunktion

$F_k(x) = (4 + 2k - 2x)\cdot e^{0,5x}$ und damit

$$A_k = \lim_{a\to-\infty}\int_a^k f_k(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[(4+2k-2x)\cdot e^{0,5x}\right]_a^k = 4\cdot e^{0,5k} - 0 = 4\cdot e^{0,5k}$$

e) Das Bild zeigt den Graphen zu $k = 2$ (Vgl. Nst.)

$$A_2 = \lim_{a\to-\infty}\int_a^2 f_2(x)\,dx = 4\cdot e^{0,5\cdot 2} = 4e$$

2. a) NSt.: $g_k(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = k \Leftrightarrow x_1 = \ln k$

$$\lim_{x\to\infty} g_k(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x - k}{e^x + k} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{k}{e^x}}{1-\frac{k}{e^x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} g_k(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x - k}{e^x + k} = \frac{0-k}{0+k} = -1$$

b) $g_k'(x) = \dfrac{2ke^x}{(e^x + k)^2}$ und $g_k''(x) = \dfrac{2ke^x\cdot(k - e^x)}{(e^x + k)^3}$

$g_k'(x) = \dfrac{2ke^x}{(e^x + k)^2} > 0$ für alle $x \in R \Rightarrow$ g ist streng monoton wachsend.

c) $g_k''(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \ln k$ wg. Vorzeichenwechsel WP ( ln k ; 0 )

Alle WP liegen auf der x-Achse.

d) Blauer Graph: $k = 1$ wegen NSt. $x_1 = \ln k = 0$

Roter Graph: $k = e$ wegen NSt. $x_1 = \ln k = 1$

Gestrichelter Graph: $f(x) = -g_1(x) = \dfrac{1 - e^x}{1 + e^x}$