Q12 * Mathematik m1 * 1. Klausur am 25.10.2017 * Gruppe A

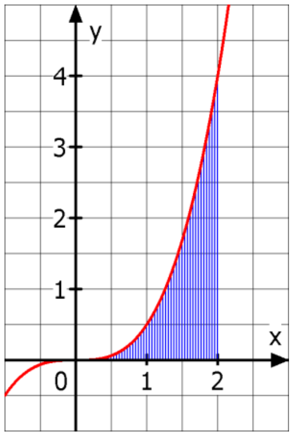
1. Bearbeiten Sie die Aufgabe auf dem Arbeitsblatt!

2. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f mit

   $f(x) = 0{,}5x^3$

   Der Inhalt A der blau schraffierten Fläche soll mit der Streifenmethode ermittelt werden.
   Bestimmen Sie dazu die Ober- <u>oder</u> die Untersumme für n Streifen und ermitteln Sie dann A mit Hilfe eines geeigneten Grenzwertes.

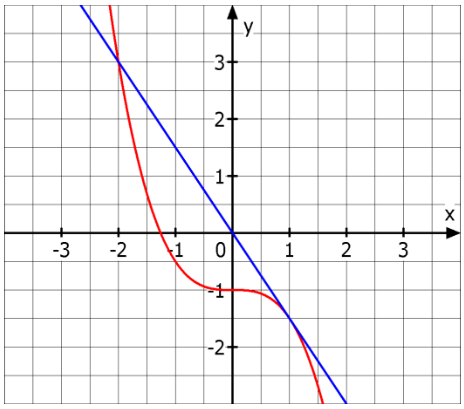
   Hinweis:
   $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$



3. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -1 - 0{,}5 \cdot x^3$ (siehe Bild!).

   a) Bestimmen Sie mit geeigneter Rechnung die Gleichung der Tangente im Punkt P(1 / -1,5).

   b) Der Graph von f und die in 3a) berechnete Tangente schließen ein Flächenstück mit dem Inhalt A ein.
   Berechnen Sie den zweiten Schnittpunkt von G_f und Tangente und dann diesen Flächeninhalt A.



4. a) Gegeben ist die Integralfunktion $I(x) = \int_{0{,}5}^{x} e^{2t}\,dt$.

   Stellen Sie die Integralfunktion I(x) integralfrei, d.h. als Funktion ohne Integralschreibweise dar.

   b) Geben Sie eine Funktion f(t) und eine untere Grenze a so an, dass gilt:

   $$x^2 - 3 = \int_a^x f(t)\,dt$$

   c) Geben Sie eine Funktion F(x) an, die sich nicht als Integralfunktion schreiben lässt. Begründen Sie kurz Ihre Wahl von F.

5. Berechnen Sie den Wert des bestimmten Integrals $\int_1^{\sqrt{6}} \frac{5x}{\sqrt{3+x^2}}\,dx$.

   Tipp: $y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$

Aufgabe	1	2	3a	b	4a	b	c	5	Summe
Punkte	5	6	2	6	2	3	2	4	30

Gutes Gelingen! G.R.

Q12 * Mathematik m1 * 1. Klausur am 25.10.2017 * Gruppe B

1. Bearbeiten Sie die Aufgabe auf dem Arbeitsblatt!

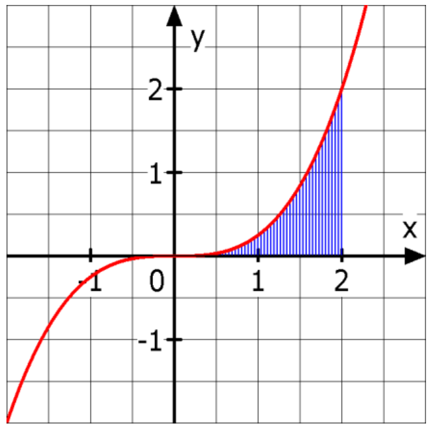
2. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f mit

   $f(x) = 0{,}25x^3$

   Der Inhalt A der blau schraffierten Fläche soll mit der Streifenmethode ermittelt werden.
   Bestimmen Sie dazu die Ober- <u>oder</u> die Untersumme für n Streifen und ermitteln Sie dann A mit Hilfe eines geeigneten Grenzwertes.

   Hinweis:

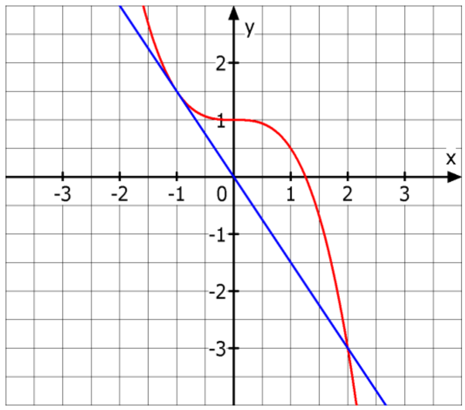
   $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$



3. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 1 - 0{,}5 \cdot x^3$ (siehe Bild!).

   a) Bestimmen Sie mit geeigneter Rechnung die Gleichung der Tangente im Punkt $P(-1 / 1{,}5)$.

   b) Der Graph von f und die in 3a) berechnete Tangente schließen ein Flächenstück mit dem Inhalt A ein.
   Berechnen Sie den zweiten Schnittpunkt von G_f und Tangente und dann diesen Flächeninhalt A.



4. a) Gegeben ist die Integralfunktion $I(x) = \int_2^x e^{0,5\,t}\,dt$.

   Stellen Sie die Integralfunktion $I(x)$ integralfrei, d.h. als Funktion ohne Integralschreibweise dar.

   b) Geben Sie eine Funktion $f(t)$ und eine untere Grenze a so an, dass gilt:

   $$x^2 - 5 = \int_a^x f(t)\,dt$$

   c) Geben Sie eine Funktion $F(x)$ an, die sich nicht als Integralfunktion schreiben lässt.
   Begründen Sie kurz Ihre Wahl von F.

5. Berechnen Sie den Wert des bestimmten Integrals $\displaystyle\int_1^{\sqrt{6}} \frac{3x}{\sqrt{3 + x^2}}\,dx$.

   Tipp: $y = \sqrt{x} \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$

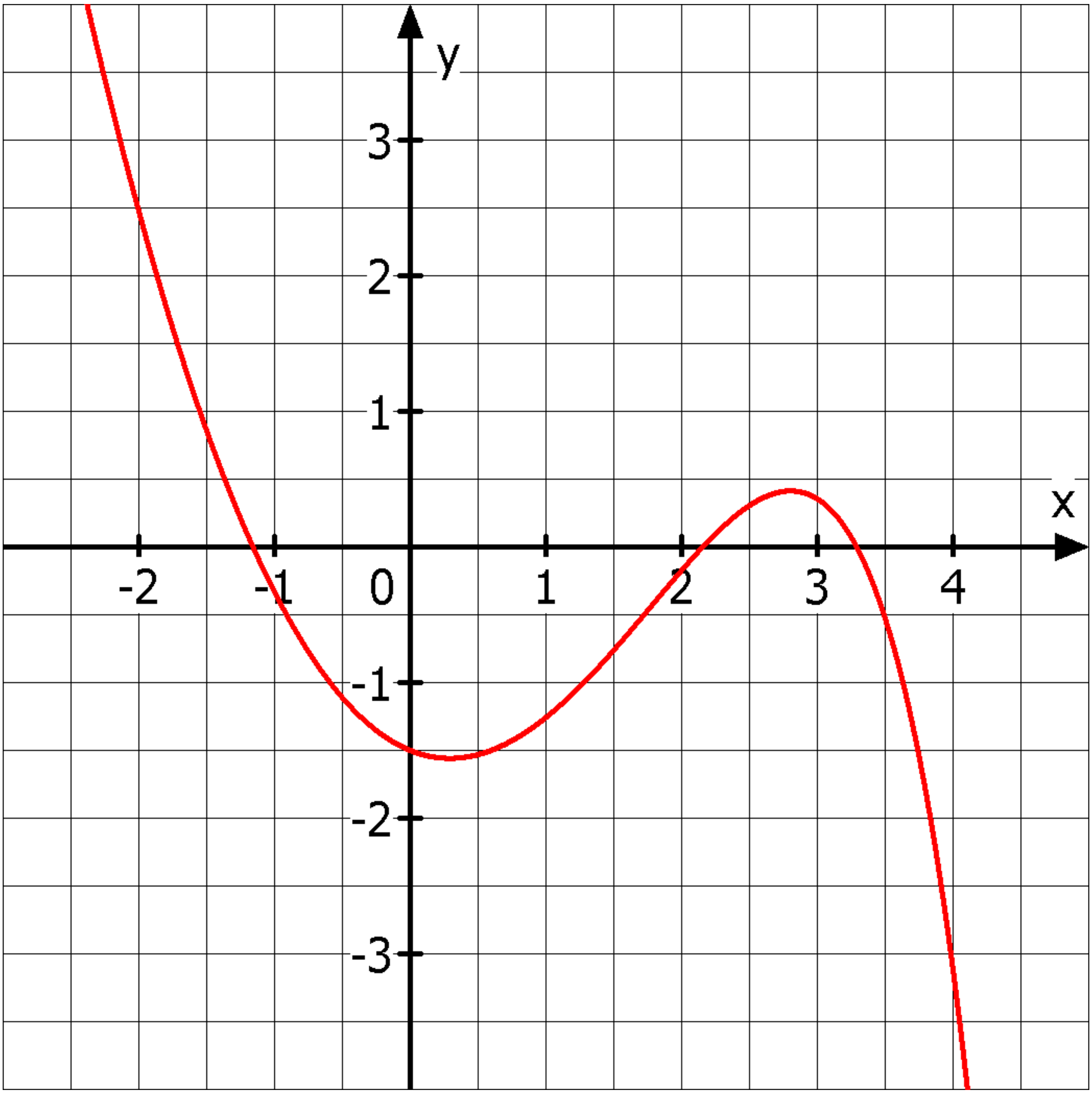
Aufgabe	1	2	3a	b	4a	b	c	5	Summe
Punkte	5	6	2	6	2	3	2	4	30

Gutes Gelingen! G.R.

Q12 * Mathematik m1 * 1. Klausur am 25.10.2017 * Arbeitsblatt

Name: ……………………………………..

1. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f .
   Tragen Sie in dieses Bild möglichst sauber und genau den Graphen der Integralfunktion
   $I(x) = \int_1^x f(t)\,dt$ ein.



Q12 * Mathematematik m1 * 1. Klausur am 25.10.2017 * Gruppe A * Lösung

1. Siehe Arbeitsblatt

2. $f(x) = 0{,}5x^3 \;;\; x_o = 0 \;;\; x_n = 2 \;;\; \Delta x = \frac{2}{n}$ und $x_i = \frac{2}{n}\cdot i$

Obersumme $U_n = \Delta x \cdot \left(f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) \right) = \frac{2}{n}\cdot\left(0{,}5\cdot x_1{}^3 + 0{,}5\cdot x_2{}^3 + ... + 0{,}5\cdot x_n{}^3 \right) =$

$$\frac{2}{n}\cdot\left(0{,}5\cdot(\frac{2}{n}\cdot 1)^3 + 0{,}5\cdot(\frac{2}{n}\cdot 2)^3 + ... + 0{,}5\cdot(\frac{2}{n}\cdot n)^3 \right) = \frac{2}{n}\cdot 0{,}5\cdot\frac{2^3}{n^3}\cdot\left(1^3 + 2^3 + ... + n^3\right) =$$

$$\frac{8}{n^4}\cdot\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4} = \frac{2\cdot n^2\cdot(n+1)^2}{n^4} = \frac{2\cdot(n+1)^2}{n^2} = \frac{2n^2+4n+2}{n^2}$$

$$A = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+4n+2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{n^2}\right) = 2$$

3. a) $f(x) = -1 - 0{,}5\cdot x^3$ und $f'(x) = -0{,}5\cdot 3\cdot x^2 = -1{,}5x^2$

$f'(1) = -1{,}5 = m$ und Tangente $g(x) = -1{,}5x + t$ $P(1/-1{,}5)$ eingesetzt:

$-1{,}5 = -1{,}5\cdot 1 + t \;\Rightarrow\; t = 0$ also Tangente: $g(x) = -1{,}5x.$

b) Schnittpunkte: $f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; -1 - 0{,}5\cdot x^3 = -1{,}5x \;\Leftrightarrow\; 0 = x^3 - 3x + 2 \;\Leftrightarrow$

$0 = (x-1)^2\cdot(x+2)$ also 2. Schnittpunkt $S(-2/g(-2)) = S(-2/3)$

$$A = \int_{-2}^{1} g(x) - f(x)\,dx = \int_{-2}^{1} -1{,}5x + 1 + 0{,}5x^3\,dx = \left[-\frac{3x^2}{4} + x + \frac{x^4}{8}\right]_{-2}^{1} =$$

$$-\frac{3}{4} + 1 + \frac{1}{8} - \left(-3 - 2 + 2\right) = \frac{3}{8} - (-3) = 3\frac{3}{8} = 3{,}375$$

4. a) $I(x) = \int_{0,5}^{x} e^{2t}\,dt = \left[\frac{1}{2}\cdot e^{2t}\right]_{0,5}^{x} = \frac{1}{2}\cdot e^{2x} - \frac{1}{2}\cdot e$

b) $x^2 - 3 = \int_a^x f(t)\,dt$; es muss gelten:

a ist eine Nullstelle von $F(x) = x^2 - 3$ und $F'(x) = f(x)$

also $x^2 - 3 = \int_{\sqrt{3}}^{x} 2t\,dt$ oder $x^2 - 3 = \int_{-\sqrt{3}}^{x} 2t\,dt$

c) $F(x) = x^2 + 1$ lässt sich nicht als Integralfunktion schreiben, da jede Integralfunktion eine Nullstelle hat, F(x) dagegen nicht.

5. $\int_1^{\sqrt{6}} \frac{5x}{\sqrt{3+x^2}}\,dx$ Probeansatz: $F(x) = \sqrt{3+x^2} \;\Rightarrow\; F'(x) = \frac{2x}{2\cdot\sqrt{3+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{3+x^2}}$

also $\int_1^{\sqrt{6}} \frac{5x}{\sqrt{3+x^2}}\,dt = 5\cdot\left[\sqrt{3+x^2}\right]_1^{\sqrt{6}} = 5\cdot\left(\sqrt{9} - \sqrt{4}\right) = 5\cdot(3-2) = 5$

Q12 * Mathematik m1 * 1. Klausur am 25.10.2017 * Gruppe B * Lösung

1. Siehe Arbeitsblatt

2. $f(x) = 0{,}25x^3 \quad ; \quad x_o = 0 \; ; \; x_n = 2 \; ; \; \Delta x = \dfrac{2}{n}$ und $x_i = \dfrac{2}{n}\cdot i$

Obersumme $U_n = \Delta x \cdot \big(f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) \big) = \dfrac{2}{n}\cdot\big(0{,}25\cdot x_1{}^3 + 0{,}25\cdot x_2{}^3 + ... + 0{,}25\cdot x_n{}^3 \big) =$

$$\frac{2}{n}\cdot\left(0{,}25\cdot(\frac{2}{n}\cdot 1)^3 + 0{,}25\cdot(\frac{2}{n}\cdot 2)^3 + ... + 0{,}25\cdot(\frac{2}{n}\cdot n)^3 \right) = \frac{2}{n}\cdot 0{,}25\cdot\frac{2^3}{n^3}\cdot\left(1^3 + 2^3 + ... + n^3\right) =$$

$$\frac{4}{n^4}\cdot\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4} = \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{n^4} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2}$$

$$A = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2 + 2n + 2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2}\right) = 1$$

3. a) $f(x) = 1 - 0{,}5\cdot x^3$ und $f'(x) = -0{,}5\cdot 3\cdot x^2 = -1{,}5\,x^2$

$f'(-1) = -1{,}5 = m$ und Tangente $g(x) = -1{,}5x + t$ $\quad P(-1/1{,}5)$ eingesetzt:

$1{,}5 = -1{,}5\cdot(-1) + t \;\Rightarrow\; t = 0$ also Tangente: $g(x) = -1{,}5\,x$.

b) Schnittpunkte: $f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; 1 - 0{,}5\cdot x^3 = -1{,}5\,x \;\Leftrightarrow\; 0 = x^3 - 3x - 2 \;\Leftrightarrow$

$0 = (x+1)^2\cdot(x-2)$ also 2. Schnittpunkt $S(2/g(2)) = S(2/-3)$

$$A = \int_{-1}^{2} f(x) - g(x)\,dx = \int_{-1}^{2} 1 - 0{,}5\,x^3 + 1{,}5x\,dx = \left[\, x - \frac{x^4}{8} + \frac{3x^2}{4} \,\right]_{-1}^{2} =$$

$$2 - 2 + 3 - \left(-1 - \frac{1}{8} + \frac{3}{4}\right) = 3 - (-\frac{3}{8}) = 3\frac{3}{8} = 3{,}375$$

4. a) $I(x) = \displaystyle\int_2^x e^{0{,}5t}\,dt = \left[\,\frac{1}{0{,}5}\cdot e^{0{,}5t}\,\right]_2^x = \left[\,2\cdot e^{0{,}5t}\,\right]_2^x = 2\cdot e^{0{,}5x} - 2\cdot e$

b) $x^2 - 5 = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$; es muss gelten:

a ist eine Nullstelle von $F(x) = x^2 - 5$ und $F'(x) = f(x)$

also $x^2 - 5 = \displaystyle\int_{\sqrt{5}}^{x} 2t\,dt$ oder $x^2 - 5 = \displaystyle\int_{-\sqrt{5}}^{x} 2t\,dt$

c) $F(x) = x^2 + 1$ lässt sich nicht als Integralfunktion schreiben, da jede Integralfunktion eine Nullstelle hat, $F(x)$ dagegen nicht.

5. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{6}} \frac{3x}{\sqrt{3 + x^2}}\,dx$ Probeansatz: $F(x) = \sqrt{3 + x^2} \;\Rightarrow\; F'(x) = \dfrac{2x}{2\cdot\sqrt{3 + x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{3 + x^2}}$

also $\displaystyle\int_1^{\sqrt{6}} \frac{3x}{\sqrt{3 + x^2}}\,dt = 3\cdot\left[\,\sqrt{3 + x^2}\,\right]_1^{\sqrt{6}} = 3\cdot\left(\sqrt{9} - \sqrt{4}\right) = 3\cdot(3-2) = 3$

Q12 * Mathematik m1 * 1. Klausur am 25.10.2017 * Arbeitsblatt

Musterlösung

1. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f .
   Tragen Sie in dieses Bild möglichst sauber und genau den Graphen der Integralfunktion
   $I(x) = \int_1^x f(t)\,dt$ ein.