Mathematik * Klasse 9 * Quadratische Gleichungen

Mitternachtsformel mit der so genannten Diskriminante D

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1/2} = \frac{1}{2a} \cdot \left(-b \pm \sqrt{D} \right) \quad \text{falls } D = b^2 - 4ac \geq 0$$

Gilt $D < 0$, dann hat die quadratische Gleichung keine Lösung!

1. Bestimme mit der „Mitternachtsformel“ die Lösungen der quadratischen Gleichung.

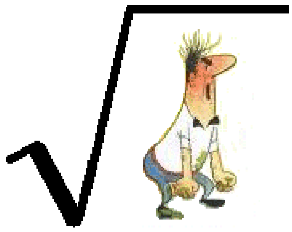
   a) $2x^2 - 3x - 5 = 0$ b) $3x^2 + 5x + 2 = 0$
   c) $5x^2 - 2x - 3 = 0$ d) $4{,}5x^2 - 3x - 1 = 0$
   e) $2x^2 + 8x + 7 = 0$ f) $5x^2 - 10x + 3 = 0$

Zu jeder Lösungsmenge gehört ein Buchstabe, die in der Reihenfolge der Aufgabenstellung ein Lösungswort ergeben!

$\{-2 \pm 0{,}5\sqrt{2}\}$	$\{-1\,;\,2{,}5\}$	$\{1 \pm 0{,}2\sqrt{10}\}$	$\{\frac{1}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{3}\}$	$\{-1\,;\,-\frac{2}{3}\}$	$\{-0{,}6\,;\,1\}$
E	F	L	M	O	R

2. Bestimme nur die Anzahl der Lösungen der quadratischen Gleichung!

   a) $3x^2 + 4x - 5 = 0$ b) $3x^2 - 4x - 5 = 0$
   c) $5x^2 + 4x + 3 = 0$ d) $5x^2 - 4x + 3 = 0$
   e) $2x^2 + 6x + 4{,}5 = 0$ f) $-2x^2 + 4x + 3 = 0$
   g) $4x^2 - 4x + 1 = 0$ h) $7x^2 - 10x + 4 = 0$



3. Bestimme den Wert von k so, dass die quadratische Gleichung genau eine Lösung hat.

   a) $2x^2 + kx + 1 = 0$ b) $3x^2 + 4x + k = 0$
   c) $kx^2 + 5x - 1 = 0$ d) $kx^2 + 36x - k = 0$
   e) $x^2 + 2kx - k = 0$ f) $x^2 + 2kx + k + 2 = 0$

4. Ergänze die quadratische Gleichung so, dass sie genau eine Lösung hat.

   a) $3x^2 + 4x - \square = 0$ b) $5x^2 + 8x + \square = 0$
   c) $\square \cdot x^2 + 6x - 3 = 0$ d) $3x^2 + \square x + 1 = 0$

5. Bestimme alle Nullstellen der Funktion.
   Kannst Du anschließend angeben, an welcher Stelle sich der Scheitel der Parabel befindet?

   a) $f(x) = 0{,}5x^2 + 2x - 4$ b) $f(x) = 0{,}4x^2 + 3{,}8x - 6{,}5$
   c) $f(x) = 0{,}5x^2 + 2x - 4$ d) $f(x) = 0{,}5x^2 + 2x + 4$
   e) $f(x) = 5x^2 + 2{,}5x - 0{,}7$ f) $f(x) = 0{,}9x^2 - 6x - 5$

G. Rasch, Januar 2008

Mathematik * Klasse 9 * Quadratische Gleichungen * Lösungen

1. Das Lösungswort lautet FORMEL.

2.
a) $3x^2 + 4x - 5 = 0$ $\quad D = 16 + 4\cdot 3\cdot 5 = 76 > 0$ Es gibt zwei Lösungen!
b) $3x^2 - 4x - 5 = 0$ $\quad D = 16 + 4\cdot 3\cdot 5 = 76 > 0$ Es gibt zwei Lösungen!
c) $5x^2 + 4x + 3 = 0$ $\quad D = 16 - 4\cdot 3\cdot 5 = -44 < 0$ Es gibt keine Lösungen!
d) $5x^2 - 4x + 3 = 0$ $\quad D = 16 - 4\cdot 3\cdot 5 = -44 < 0$ Es gibt keine Lösungen!
e) $2x^2 + 6x + 4{,}5 = 0$ $\quad D = 36 - 4\cdot 2\cdot 4{,}5 = 0$ Es gibt genau eine Lösung!
f) $-2x^2 + 4x + 3 = 0$ $\quad D = 16 + 4\cdot 2\cdot 3 = 40 > 0$ Es gibt zwei Lösungen!
g) $4x^2 - 4x + 1 = 0$ $\quad D = 16 - 4\cdot 4\cdot 1 = 0$ Es gibt genau eine Lösung!
h) $7x^2 - 10x + 4 = 0$ $\quad D = 100 - 4\cdot 7\cdot 4 = -12 < 0$ Es gibt keine Lösungen!

3. Es muss jeweils $D = 0$ gelten, damit genau eine Lösung der Gleichung existiert.

a) $D = k^2 - 4\cdot 2\cdot 1 = k^2 - 8\ ;\ D = 0 \Leftrightarrow k^2 = 8 \Leftrightarrow k_{1/2} = \pm 2\sqrt{2}$

b) $D = 16 - 4\cdot 3\cdot k = 16 - 12k\ ;\ D = 0 \Leftrightarrow 12k = 16 \Leftrightarrow k = \dfrac{4}{3}$

c) $D = 25 + 4k\ ;\ D = 0 \Leftrightarrow 4k = -25 \Leftrightarrow k = -6{,}25$

d) $D = 36 + 4k^2 > 0$; Die quadratische Gleichung hat für jedes k zwei Lösungen!

e) $D = 4k^2 + 4\cdot 1\cdot k = 4k\cdot(k+1)\ ;\ D = 0 \Leftrightarrow 4k\cdot(k+1) = 0 \Leftrightarrow k_1 = 0\ ;\ k_2 = -1$

f) $D = 4k^2 - 4\cdot 1\cdot(k+2) = 4\cdot(k^2 - k - 2)\ ;\ D = 0 \Leftrightarrow k^2 - k - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$k^2 - k - 2 = 0 \Leftrightarrow k_{1/2} = \dfrac{1}{2}\cdot\left(1 \pm \sqrt{1+4\cdot 1\cdot 2}\right) = \dfrac{1}{2}\cdot(1 \pm 3)$ also $k_1 = 2\ ;\ k_2 = -1$

4. Wie bei Aufgabe 3 muss jeweils $D = 0$ gelten.

a) $D = 16 + 4\cdot 3\cdot\square = 16 + 12\cdot\square \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \square = -\dfrac{16}{12} = -\dfrac{4}{3}$

b) $D = 64 - 4\cdot 5\cdot\square = 64 - 20\cdot\square \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \square = \dfrac{64}{20} = 3{,}2$

c) $D = 36 + 4\cdot\square\cdot 3 = 36 + 12\cdot\square \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \square = -\dfrac{36}{12} = -3$

d) $D = \square^2 - 4\cdot 3\cdot 1 = \square^2 - 12 \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \square_{1/2} = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$

5. Hat eine quadratische Funktion zwei Nullstellen, dann liegt der Scheitel genau zwischen diesen Nullstellen!

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = -2 \pm 2\cdot\sqrt{3}$ d.h. $x_S = -2$ $\quad (y_S = f(x_S) = f(-2) = -6)$

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = -4{,}75 \pm 0{,}6\cdot\sqrt{69}$ d.h. der Scheitel liegt bei $x_S = -4{,}75$.

c) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = -2 \pm 2\cdot\sqrt{3}$ d.h. der Scheitel liegt bei $x_S = -2$.

d) $f(x) = 0$ hat keine Lösung, denn $D = -4 < 0$
Die Lage des Scheitels ist damit nicht direkt erkennbar! Da die Parabel zur Aufgabe c aber genau um 8 Einheiten unterhalb der Parabel von Aufgabe d liegt, gilt $x_S = -2$.

e) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = -0{,}25 \pm 0{,}45$ also $x_1 = 0{,}2$ und $x_2 = -0{,}7$ und
der Scheitel liegt bei $x_S = -0{,}25$.

f) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \dfrac{10}{3} \pm \dfrac{5\cdot\sqrt{6}}{3}$ d.h. der Scheitel liegt bei $x_S = \dfrac{10}{3}$.