Q12 * Astrophysik * Scheinbare und absolute Helligkeit

Wichtige Formeln für Sterne

Für die scheinbaren Helligkeiten m_1 und m_2 und die Bestrahlungsstärken E_1 und E_2 zweier Sterne gilt:

$$m_1 - m_2 = -2,5 \cdot \lg\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \quad \text{und} \quad \frac{E_1}{E_2} = q^{m_2 - m_1} \quad \text{mit} \quad q = \sqrt[5]{100} = 10^{2/5} = 10^{0,4}$$

Die absolute Helligkeit M eines Sterns ist seine scheinbare Helligkeit in der Entfernung von 10 pc.
Zwischen den absoluten Helligkeiten M_1 und M_2 und den Leuchtkräften L_1 und L_2 zweier Sterne gilt:

$$M_1 - M_2 = -2,5 \cdot \lg\left(\frac{L_1}{L_2}\right) \quad \text{und} \quad \frac{L_1}{L_2} = q^{M_2 - M_1} \quad \text{wobei zusätzlich } E = \frac{L}{4\pi r^2} \text{ gilt}$$

Zwischen der Entfernung r eines Sterns vom Beobachter, seiner scheinbaren und absoluten Helligkeit besteht folgender Zusammenhang:

$$m - M = 5 \cdot \lg\left(\frac{r}{10\,\text{pc}}\right)$$

Man nennt $m - M$ den Entfernungsmodul des Sterns.

Die Entfernung eines Sterns errechnet man mit Hilfe der Parallaxe p mit

$$r = \frac{1''}{p} \cdot \text{parsec} = \frac{1''}{p} \cdot \text{pc}$$

Hinweis: 1 pc = 3,26 Lj

optischer Doppler-Effekt: $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_{radial}}{c}$ Wellenlängenänderung der Absorptionslinien

Wiensches Verschiebungsgesetz:

$$\lambda_{max} \cdot T = b \quad \text{mit} \quad b = 2,898 \cdot 10^{-3}\,\text{m} \cdot \text{K}$$

Stefan-Boltzmann-Gesetz:

$$L = \sigma \cdot A \cdot T^4 \quad \text{mit} \quad \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}$$

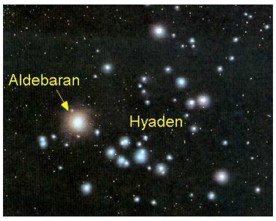
T Oberflächentemperatur des Sterns, λ_{max} Wellenlänge im Spektrum mit maximaler Strahlungsleistung, L Leuchtkraft bzw. Strahlungsleistung, $A = 4 \cdot R^2 \cdot \pi$ Oberflächeninhalt des Sterns, d.h. R ist der Radius des Sterns.

Aufgabe

Vom Stern Aldebaran (im Stier) wurden folgende Daten durch präzise Messungen bestimmt:
scheinbare Helligkeit $m = 0,87$ mag, Parallaxe $p = 0,049''$, $\lambda_{max} \approx 800\,\text{nm}$,
Wellenlängenänderung der Absorptionslinien $\Delta\lambda / \lambda = +1,8 \cdot 10^{-4}$ und jährliche Eigenbewegung $\mu = 0,20''\,\text{pro Jahr}$.

Berechnen Sie

a) die Entfernung Aldebarans in pc und in Lichtjahren,
b) die absolute Helligkeit und die Leuchtkraft (in Vielfachen der Sonnenleuchtkraft),
c) die Oberflächentemperatur und den ungefähren Radius R von Aldebaran,
d) die Geschwindigkeit, mit der sich Aldebaran relativ zur Sonne bewegt.



Q12 * Astrophysik * Scheinbare und absolute Helligkeit * Lösung der Aufgabe

a) $r = \frac{1''}{p} \cdot pc = \frac{1''}{0{,}049''} \cdot pc = 20\,pc$ bzw. $67\,Lj$

b) $m - M = 5 \cdot \lg \frac{r}{10pc} \quad \Rightarrow \quad M = m - 5 \cdot \lg \frac{20pc}{10pc} = 0{,}87 - 5 \cdot \lg 2 = -0{,}64$

$$\frac{L_{Aldebaran}}{L_\odot} = q^{M_\odot - M_{Aldebaran}} \quad \Rightarrow \quad L_{Aldebaran} = 10^{0{,}4 \cdot (4{,}8 + 0{,}64)} \cdot L_\odot \approx 150 \cdot L_\odot$$

c) $\lambda_{max} \cdot T = b$ mit $b = 2{,}898 \cdot 10^{-3}\, m \cdot K \quad \Rightarrow \quad T_{Aldebaran} = \frac{2{,}898 \cdot 10^{-3}\, m \cdot K}{800 \cdot 10^{-9}\, m} \approx 3600\,K$

$$L = \sigma \cdot A \cdot T^4 \text{ und } A = 4 \cdot \pi \cdot R^2 \quad \Rightarrow \quad R^2 = \frac{A}{4\pi} = \frac{L}{4\pi \cdot \sigma \cdot T^4} = \frac{150 \cdot L_\odot}{4\pi \cdot \sigma \cdot T^4} \quad \Rightarrow$$

$$R = \sqrt{\frac{150 \cdot L_\odot}{4\pi \cdot \sigma \cdot T^4}} = \sqrt{\frac{150 \cdot 3{,}82 \cdot 10^{26}\, W}{4\pi \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} \cdot 3600^4\, K^4}} = 2{,}2 \cdot 10^{10}\, m = \frac{2{,}2 \cdot 10^{10}\, m}{6{,}96 \cdot 10^8\, m} \cdot R_\odot = 32 R_\odot$$

d) $\frac{v_{rad}}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad v_{rad} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \cdot c = 1{,}8 \cdot 10^{-4} \cdot 3{,}0 \cdot 10^8 \frac{m}{s} = 54 \frac{km}{s}$

$$v_{tan} = \frac{r \cdot \tan\mu}{1a} = \frac{20\,pc \cdot \tan(0{,}20'')}{365 \cdot 24 \cdot 3600\, s} = \frac{20 \cdot 3{,}09 \cdot 10^{13}\, km \cdot \tan(0{,}20'')}{365 \cdot 24 \cdot 3600\, s} = 19 \frac{km}{s}$$

$$v = \sqrt{v_{rad}{}^2 + v_{tan}{}^2} = \sqrt{54^2 + 19^2}\ \frac{km}{s} = 57 \frac{km}{s}$$