1. Klausur im GK Mathematik m2 am 24.01.2006

1. Gegeben sind die beiden Funktionen f und g mit

   $f(x) = 4x - x^2$ und $g(x) = x^2 - 6$ mit $D_f = D_g = \mathbb{R}$.

   a) Skizzieren Sie die Graphen und berechnen Sie alle ihre Schnittpunkte.

   b) Berechnen Sie den Flächeninhalt, den die beiden Graphen einschließen!

2. Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$ und $D_f = [0\,;3]$ rotiere

   um **<u>y-Achse</u>** und erzeuge so ein Rotationsvolumen mit dem Inhalt V.
   Bestimmen Sie V !

   Hinweis:
   Ermitteln Sie erst die zu f gehörende Umkehrfunktion und führen Sie dann die Rotation um die **<u>x-Achse</u>** durch. Skizzieren Sie die Graphen von f und f^{-1} .

3. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \ln(x) + \ln(3 - 2x)$.

   a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und alle Nullstellen von f .

   b) Begründen Sie, dass der Graph von f genau einen Hochpunkt hat.

   Bestimmen Sie nun den Wertebereich von f .

4. Lösen Sie die Gleichung. Geben Sie alle Lösungen auf drei Dezimalstellen gerundet an.

   a) $2e^{3x-4} = 5$ b) $e^{2x} - e^x = 2$

5. Bestimmen Sie jeweils den Wert von k .
   Runden Sie am Ende Ihrer Rechnung k auf drei Dezimalstellen genau.

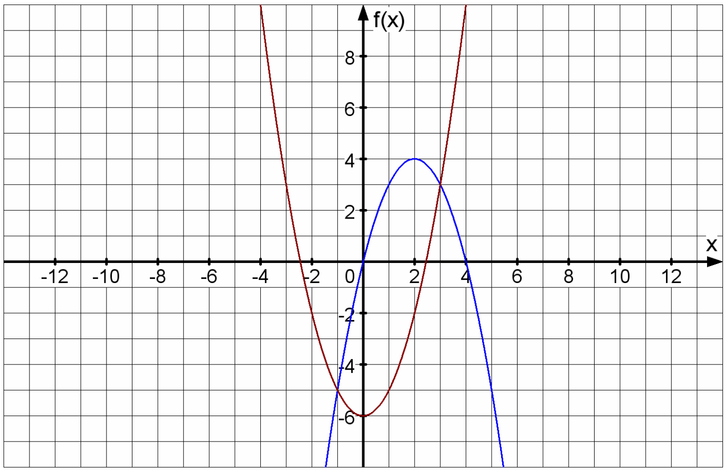
   a) $\int_1^k \frac{2}{x}\,dx = 3$ b) $\int_e^{2e} \frac{3}{kx}\,dx = 1$

Gutes Gelingen! G.R.

Aufgabe	1a	b	2	3a	b	4a	b	5a	b	Σ
Punkte	6	4	10	5	6	3	5	3	4	46

1. Klausur im GK Mathematik m2 am 24.01.2006 * Lösungen

1. $f(x) = 4x - x^2$; $g(x) = x^2 - 6$



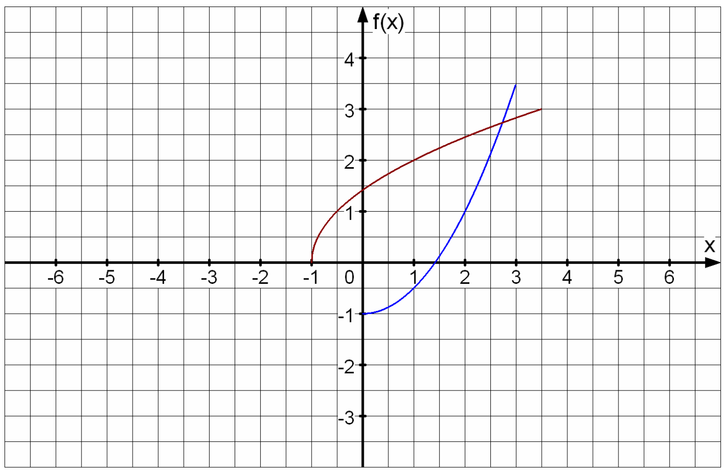
a) Schnittpunkte:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$
$$4x - x^2 = x^2 - 6 \Leftrightarrow$$
$$0 = 2x^2 - 4x - 6 \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x-3)\cdot(x+1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$x_1 = 3 \ ; \ x_2 = -1$$
$$S_1(3;3) \ ; \ S_2(-1;-5)$$

b) $$F = \int_{-1}^{3} f(x) - g(x)\, dx = \int_{-1}^{3} 4x - x^2 - x^2 + 6\, dx = \int_{-1}^{3} 4x - 2x^2 + 6\, dx =$$

$$\int_{-1}^{3} 4x - 2x^2 + 6\, dx = \left[2x^2 - \frac{2x^3}{3} + 6x \right]_{-1}^{3} = 18 - 18 + 18 - (2 + \frac{2}{3} - 6) = 21\frac{1}{3}$$

2. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$; $D_f = [0\,;3]$



$$f^{-1}: \quad x = \frac{1}{2}y^2 - 1 \ \Rightarrow$$
$$\frac{1}{2}y^2 = x + 1 \ \Rightarrow \ y = \pm\sqrt{2x + 2}$$
wegen $D_f = W_{f^{-1}} = [0;3]$ folgt
$$f^{-1}(x) = +\sqrt{2x + 2} \quad und$$
$$D_{f^{-1}} = W_f = [-1\,;3{,}5]$$

$$V = \int_{-1}^{3,5} [f^{-1}(x)]^2 \cdot \pi\, dx = \int_{-1}^{3,5} (2x + 2)\cdot \pi\, dx = \pi \cdot [x^2 + 2x]_{-1}^{3,5} = \pi \cdot [(12{,}25 + 7) - (1 - 2)] =$$

$$\pi \cdot [(12{,}25 + 7) - (1 - 2)] = 20{,}25 \cdot \pi = \frac{81}{4}\pi$$

3. a) $f(x) = \ln(x) + \ln(3 - 2x)$; $x > 0 \ und \ 3 - 2x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1{,}5$; $D_f =]0;1{,}5[$

Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) + \ln(3 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x\cdot(3 - 2x)) = 0 \Leftrightarrow$

$$x\cdot(3 - 2x) = 1 \Leftrightarrow 3x - 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{1}{4}(3 \pm \sqrt{9 - 8})$$

$x_1 = 1$; $x_2 = \frac{1}{2}$ sind die beiden Nullstellen.

3. b) $f(x) = \ln(x) + \ln(3-2x) \quad \Rightarrow \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 1{,}5}} f(x) = -\infty$ und

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1\cdot(-2)}{3-2x} = \frac{3-2x-2x}{x\cdot(3-2x)} = \frac{3-4x}{x\cdot(3-2x)}$$

$$f'(x) = \frac{3-4x}{x\cdot(3-2x)} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 3-4x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x_3 = \frac{3}{4} \quad \text{, also Hochpunkt } \left(\frac{3}{4}; f\left(\frac{3}{4}\right)\right)$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln\left(3-\frac{3}{2}\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}\right) = \ln\left(\frac{9}{8}\right) \approx 0{,}118 \quad \textit{und} \quad W_f = \left]-\infty\,;\ln\left(\frac{9}{8}\right)\right]$$

4. a) $2e^{3x-4} = 5 \quad\Leftrightarrow\quad e^{3x-4} = 2{,}5 \quad\Leftrightarrow\quad 3x-4 = \ln(2{,}5) \quad\Leftrightarrow\quad x = \dfrac{4+\ln(2{,}5)}{3} \approx 1{,}639$

b) $e^{2x} - e^{x} = 2$ *mit der Substitution* $u = e^x$ *gilt damit* $u^2 - u - 2 = 0$

$u^2 - u - 2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad (u-2)\cdot(u+1) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad u_1 = 2$ *und* $(u_2 = -1)$

$e^x = 2 \quad\Leftrightarrow\quad x = \ln(2) \approx 0{,}693$ (*zu* $e^x = -1$ *gibt es keine Lösung*!)

5. a) $\displaystyle\int_1^k \frac{2}{x}\,dx = 3 \quad\Leftrightarrow\quad 2\cdot\ln(k) = 3 \quad\Leftrightarrow\quad k = e^{1{,}5} \approx 4{,}482$

b) $\displaystyle\int_e^{2e} \frac{3}{k\,x}\,dx = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{3}{k}\cdot[\ln x]_e^{2e} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \ln(2e) - \ln(e) = \frac{k}{3} \quad\Leftrightarrow$

$\ln(2) + 1 - 1 = \dfrac{k}{3} \quad\Leftrightarrow\quad k = 3\cdot\ln(2) = \ln(8) \approx 2{,}079$