

2. Klausur im LK Mathematik, K12, 11.01.2001

1. Gegeben sind die beiden Funktionen $f(x) = \ln(x+2)$ und $g(x) = 1 - \ln(\frac{1}{x})$.
- Vereinfachen Sie den Funktionsterm von g und skizzieren Sie dann die Graphen von f und von g in ein gemeinsames Koordinatensystem.
 - Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Graphen und ermitteln Sie den zugehörigen Schnittwinkel auf ein Zehntel Grad genau!

2. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = \ln(\frac{kx}{x^2+1})$ mit $k > 0$.

- Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f_k und untersuchen Sie das Verhalten der Funktion an den Grenzen des Definitionsbereichs!
- Für welche Werte von k hat f_k keine Nullstellen?
Für welchen Wert von k haben die beiden Nullstellen von f_k genau den Abstand 2 voneinander?
- Berechnen Sie die Ableitungsfunktion $f'_k(x)$ und begründen Sie genau, dass der Graph von f_k als Extrempunkte nur den Hochpunkt HOP $(1 / \ln(0,5k))$ besitzt.
- Für welchen Wert von k hat f_k den Wertebereich $] -\infty; \frac{1}{2}]$?

Betrachten Sie nun die Funktionenschar $g_t(x) = \ln(\frac{tx}{x^2+1})$ mit $t < 0$.

- Welcher Zusammenhang besteht zwischen $g_t(x)$ und $f_k(x)$?
Geben Sie nun ohne jede weitere Berechnung alle Extrempunkte und den Wertebereich von g_t in Abhängigkeit von t an!

3. Gegeben ist die Funktionenschar $h_k(x) = 2 \ln(x) - \ln(x-k)$ mit $k > 1$.

- Bestimmen Sie den Definitionsbereich von h_k und untersuchen Sie das Verhalten der Funktion an den Grenzen des Definitionsbereichs!
- Zeigen Sie mit geeigneter Rechnung, dass alle Graphen der Schar einen Extrempunkt $P(2k / \ln(4k))$ besitzen.
Handelt es sich um einen Tief- oder Hochpunkt?
- Auf welcher Ortskurve liegen die in b) angegebenen Extrempunkte der Kurvenschar?
Geben Sie den Funktionsterm und den Definitionsbereich an!

4. a) Ermitteln Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{2}{x \ln(x)} dx$.

Hinweis: Für $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ gibt es eine bekannte Integrationsregel!

- Bestimmen Sie ein $k > 2$ so, dass gilt $\int_2^k \frac{2}{x \ln(x)} dx = 1$.

Gutes Gelingen! G.R.