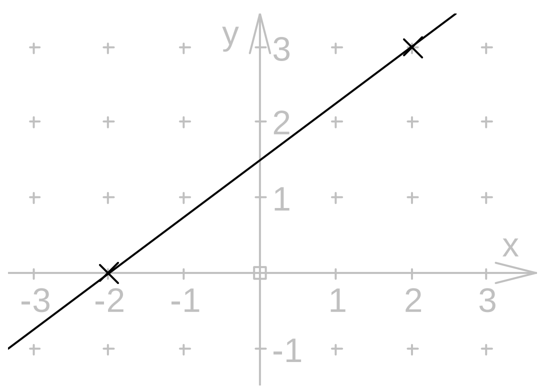
Mathematik * Jahrgangsstufe 8 * Aufgaben zum Funktionsbegriff

1. Ein Handwerker verlangt für die Anfahrt 20 € und pro 5 Minuten Arbeitszeit einen Lohn von 4,00 €.
   a) Finde den Term $f(x)$, der für die Arbeitszeit x [in Minuten] die Gesamtkosten $f(x)$ [in Euro] angibt.
   b) Erstelle eine Wertetabelle mit mindestens 8 verschiedenen x-Werten und zeichne dann den Graphen der Funktion. Überlege, welche Einteilung auf den beiden Achsen sinnvoll ist. (Warum ist z.B. die Einteilung 1 Minute $\hat{=}$ 1cm nicht sehr sinnvoll?)
   c) Berechne jeweils mit Hilfe des Terms $f(x)$, wie lange der Handwerker arbeitet, wenn die Gesamtkosten 48,00 €, 76,00 € bzw. 140,00 € betragen.
   Wie kann man diese Gesamtkosten am Graphen erkennen?

2. Eine Schraubenfeder der Länge 20cm dehnt sich, wenn man Massestücke dranhängt. Pro 10g dehnt sich dabei die Feder um 0,5 cm, d.h. die angehängte Masse x und die Dehnung $d(x)$ [d.h. die Längenänderung der Feder] sind zueinander proportional.
   a) Finde einen Term $f(x)$ für die Gesamtlänge der Schraubenfeder. Achte auch auf den korrekten Gebrauch der Einheiten. Erstelle nun mit Hilfe von $f(x)$ eine Wertetabelle.
   b) Zeichne den Graphen für $f(x)$. Wähle auf den Achsen geeignete Einheiten!
   c) Welche Masse hängt an der Feder, wenn sie eine Gesamtlänge von 28,5cm hat. Beantworte die Frage mit Hilfe des Graphen und mit Hilfe einer Berechnung.
   d) Gib auch den Term für die Dehnung $d(x)$ an und zeichne den Graphen dazu in das Diagramm von b). Was fällt auf?

3. Erstelle für jede der folgenden Funktionen eine Wertetabelle und trage die Punkte dann in ein Koordinatensystem ein. Versuche auch den gesamten Graphen zu skizzieren. Für welche der Funktionen ist die Definitionsmenge nicht die gesamte Zahlenmenge Q?
   a) $f(x) = 0{,}2x - 1$ b) $f(x) = 2 - x$
   c) $f(x) = (x-3)\cdot(x+1)$ d) $f(x) = x^2 - 1$
   e) $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$ f) $f(x) = \dfrac{4}{x^2+1}$

4. Das Bild zeigt den Graphen einer Funktion f.
   Finde heraus, wie der zugehörige Funktionsterm lautet.



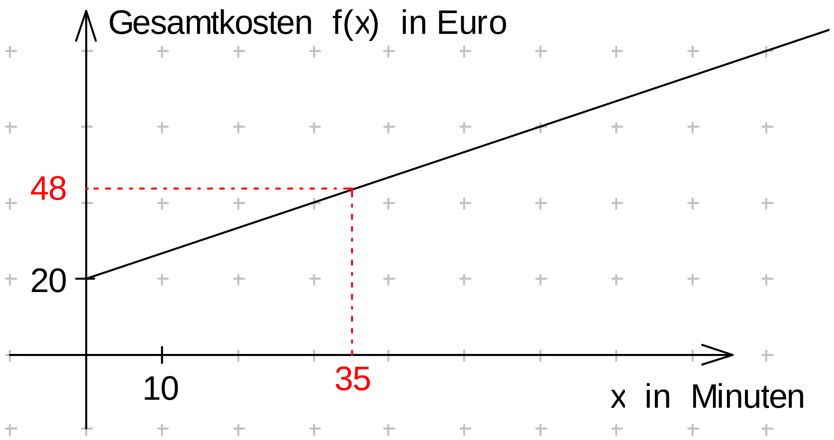
Mathematik * Jahrgangsstufe 8 * Aufgaben zum Funktionsbegriff * Lösungen

1. a) $f(x) = 20 + x \cdot 0{,}80$ wobei x die Arbeitszeit in Minuten und f(x) die Gesamtkosten in der Einheit Euro angibt.

(Man kann auch schreiben: $f(x) = 20\,€ + x \cdot 0{,}80 \frac{€}{\text{min}}$, wobei man jetzt für x eine beliebige Zeit x einsetzen darf und für f(x) den jeweiligen Eurobetrag bekommt.)

b) Wertetabelle zu $f(x) = 20 + x \cdot 0{,}80$

x	0	5	10	15	20	30	50	60	90
f(x)	20	24	28	32	36	44	60	68	92



c) $48 = 20 + x \cdot 0{,}80 \;\Leftrightarrow\; 28 = x \cdot 0{,}80 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{28}{0{,}8} = 35$

$76 = 20 + x \cdot 0{,}80 \;\Leftrightarrow\; 56 = x \cdot 0{,}80 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{56}{0{,}8} = 70$

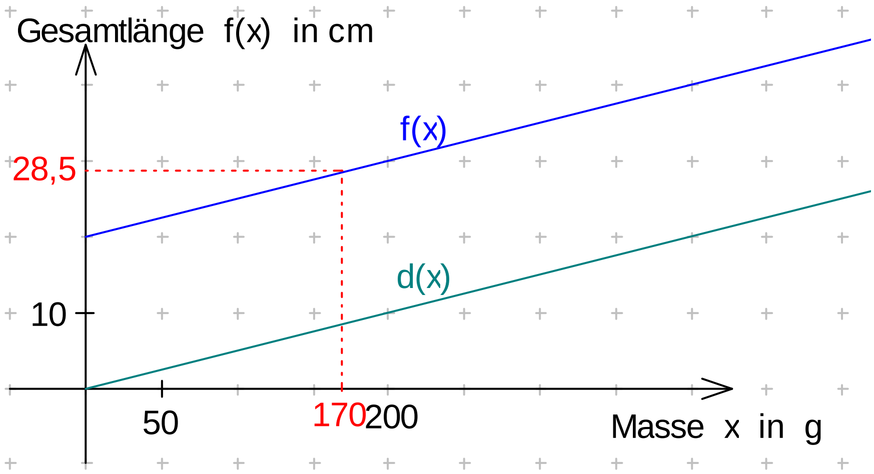
$140 = 20 + x \cdot 0{,}80 \;\Leftrightarrow\; 120 = x \cdot 0{,}80 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{120}{0{,}8} = 150$

Bei den Gesamtkosten 48 €, 76 € bzw. 140 € hat der Handwerker 35 Minuten, 70 Minuten bzw. 150 Minuten = 2,5 Stunden gearbeitet.
Die Werte kann man näherungsweise aus dem Diagramm (s.o.) herauslesen.

2. a) $f(x) = 20\text{cm} + x \cdot \frac{0{,}5\text{cm}}{10\text{g}}$ oder $f(x) = 20\text{cm} + \frac{1\text{cm}}{20\text{g}} \cdot x$

x	0	10g	20g	50g	100g	200g	300g	250g
f(x)	20cm	20,5cm	21cm	22,5cm	25cm	30cm	35cm	32,5cm

b)



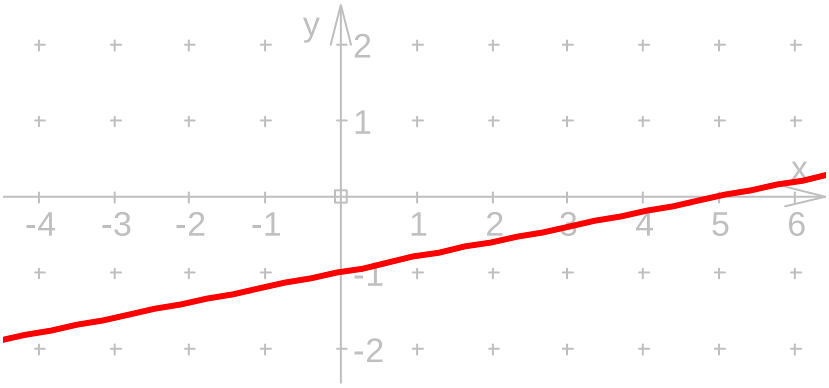
c) $28{,}5\text{cm} = 20\text{cm} + x \cdot \frac{0{,}5\text{cm}}{10\text{g}} \Leftrightarrow 8{,}5\text{cm} = x \cdot \frac{0{,}5\text{cm}}{10\text{g}} \Leftrightarrow x = \frac{8{,}5\text{cm} \cdot 10\text{g}}{0{,}5\text{cm}} = 170\text{g}$

Diesen Wert kann man näherungsweise auch aus dem Diagramm entnehmen.

d) Die beiden Graphen liegen parallel zueinander.
Da die angehängte Masse und die Dehnung zueinander direkt proportional sind, gehört zum Graphen der Dehnung eine Gerade, die durch den Ursprung geht.

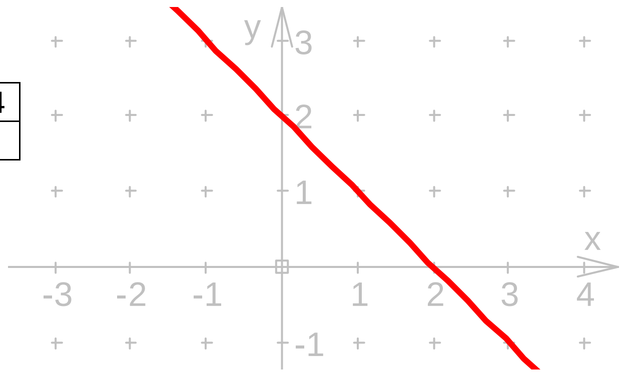
3. a) $f(x) = 0{,}2x - 1$

x	0	5	10	-5	-10	1	2	4	-4
f(x)	-1	0	2	-2	-3	-0,8	-0,6	-0,2	-1,8



b) $f(x) = 2 - x$

x	0	1	2	3	5	-1	-2	-4
f(x)	2	1	0	-1	-3	3	4	6

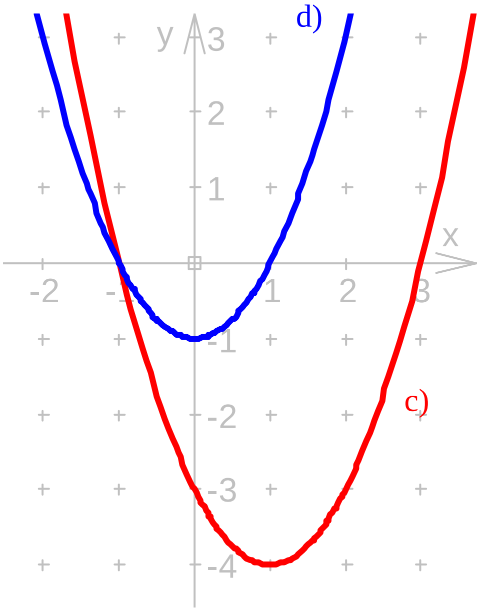


c) $f(x) = (x-3)\cdot(x+1)$

x	0	1	2	3	4	-1	-2
f(x)	-3	-4	-3	0	5	0	5

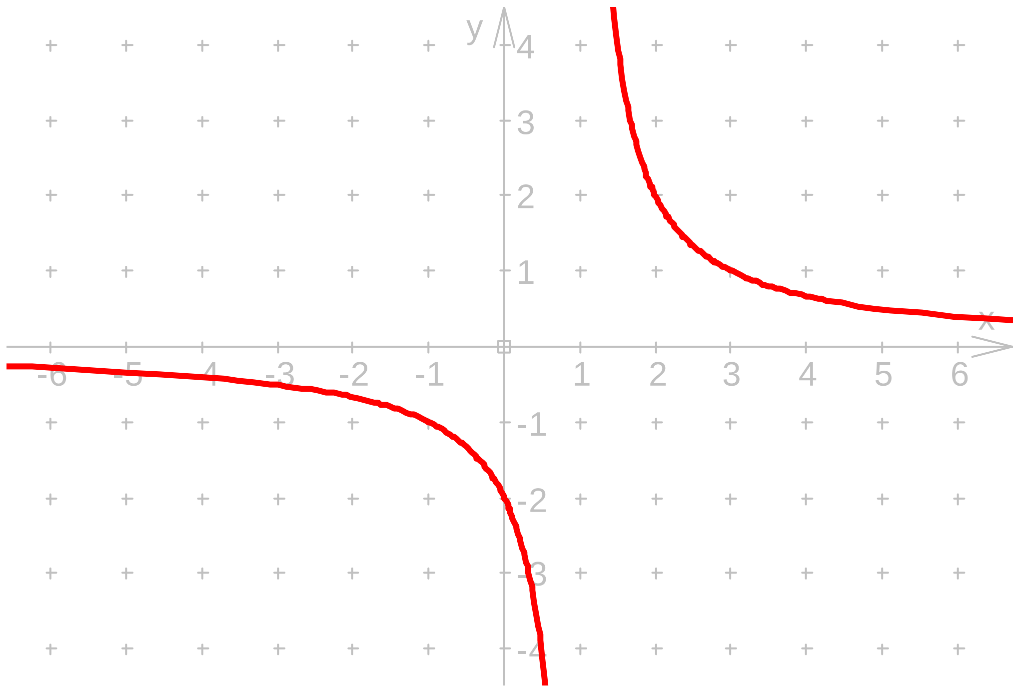
d) $f(x) = x^2 - 1$

x	0	1	-1	2	-2	3	-3
f(x)	-1	0	0	3	3	8	8



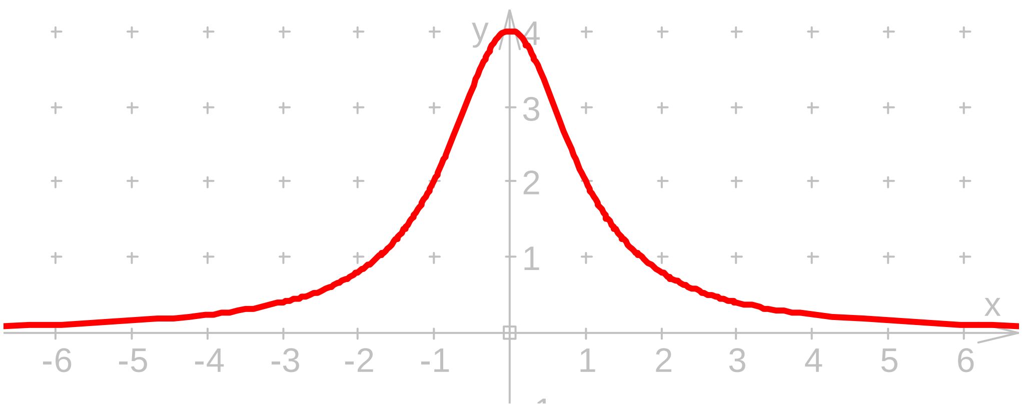
e) $f(x) = \frac{2}{x-1}$ $\qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

x	0	1	2	3	4	5	11	1,5	0,5	-1	-4
f(x)	-2	nicht definiert	2	1	2/3	0,5	0,2	4	-4	-1	-0,4



f) $f(x) = \frac{4}{x^2+1}$

x	0	1	2	3	5	-1	-2	-3	-5
f(x)	4	2	0,8	0,4	≈ 0,15	2	0,8	0,4	≈ 0,15



Nur bei Aufgabe e) ist der Definitionsbereich nicht die ganze Zahlenmenge Q.

4. $f(x) = 1{,}5 + 0{,}75x$

Die beiden Punkte (2;3) und (-2 ; 0) liegen auf der Geraden

Probe: $f(2) = 1{,}5 + 0{,}75 \cdot 2 = 1{,}5 + 1{,}5 = 3$ also gehört (2;3) zum Graphen

$f(-2) = 1{,}5 + 0{,}75 \cdot (-2) = 1{,}5 - 1{,}5 = 0$ also gehört (−2;0) zum Graphen