

## \*\* Lineare Gleichungssysteme \*\* Jahrgangsstufe 8

### Was ist ein lineares Gleichungssystem?

Sind mehrere lineare Gleichungen mit mehreren Unbekannten (Variablen) **gleichzeitig** zu lösen, so spricht man von einem **linearen Gleichungssystem** (LGS).

Das folgende LGS besteht z.B. aus 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten:

$$\begin{array}{lcl} (1) & 3x + 2y + z = 8 & \\ (2) & 2x \quad - z = 0 & \\ (3) & x - 4y + 2z = 14 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Es empfiehlt sich, gleiche Unbekannte} \\ \text{möglichst untereinander zu schreiben.} \\ \text{(Wegen besserer Übersichtlichkeit!)} \end{array}$$

### Wie löst man ein LGS?

Löse **eine** der Gleichungen nach **einer beliebigen** Unbekannten auf und setze diesen Ausdruck in die **restlichen** Gleichungen ein. (Triff eine geschickte Wahl!) So entsteht ein neues LGS, das eine Unbekannte und auch eine Gleichung weniger enthält als das ursprüngliche.

**Wiederhole dies**, bis nur noch eine Gleichung übrig ist.

Sollten in dieser letzten Gleichung noch mehr Unbekannte sein (d.h. das ursprüngliche LGS enthielt mehr Unbekannte als Gleichungen!), so gibt es i.a. unendlich viele Lösungen und man kann bis auf eine Unbekannte alle anderen frei wählen. Enthält die letzte Gleichung nur noch eine Unbekannte, so ist die Aufgabe offensichtlich eindeutig lösbar.

Die gefundenen Werte der Unbekannten setzt man nun in die Gleichungen ein und rechnet "rückwärts" die "hinausgeworfenen" Unbekannten der Reihe nach aus.

In unserem Beispiel lösen wir (2) nach z auf:  $z = 2x$  und setzen in (1) und (3) ein:

$$\begin{array}{lcl} (1') & 5x + 2y = 8 & \\ (3') & 5x - 4y = 14 & \end{array}$$

(Mit einem Strich kann man jeweils die LGS trennen!)

Nun lösen wir (1') nach x (hier nur 5x) auf:  $5x = 8 - 2y$  und setzen in (3') ein:

$$(3'') \quad 8 - 2y - 4y = 14 \quad \text{d.h.} \quad -6y = 6, \text{ also } \underline{y = -1}.$$

Nun wird "rückwärts" eingesetzt:  $y = -1$  in (1') liefert:

$$(1') \quad 5x - 2 = 8, \text{ d.h. } \underline{x = 2}$$

Und  $y = -1$  sowie  $x = 2$  in (2) liefert  $z = 2 \cdot 2$  also  $\underline{z = 4}$ .

Die eindeutige Lösung lautet hier also  $(x / y / z) = (2 / -1 / 4)$ .

### Aufgaben:

Stelle jeweils das lineare Gleichungssystem auf. Gibt es nur eine Lösung, so berechne diese. Gibt es aber mehrere Lösungen, so gib drei verschiedene Lösungen an!

1. a) Die Summe dreier Zahlen ist 18.  
b) Die Summe dreier Zahlen ist 18 und eine der Zahlen ist doppelt so groß wie die Summe der beiden anderen.  
c) Die Summe dreier Zahlen ist 18. Eine der drei Zahlen ist doppelt so groß wie die Summe der beiden anderen und zudem um 2 größer als eine der anderen.
2. Ein Dreieck hat den Umfang 26cm. Die längste Seite ist um 2cm kleiner als die Summe der beiden anderen Seiten. Die längste Seite ist außerdem doppelt so lang wie eine der beiden anderen!