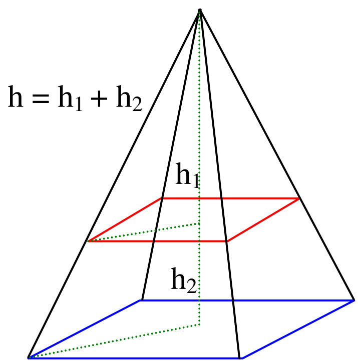
# Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Pyramiden * Winkel zwischen Kanten

1. In welcher Höhe muss man eine Pyramide parallel zur Grundfläche durchschneiden, um zwei Körper mit gleichem Volumen zu erhalten?
   Es entstehen dabei eine Pyramide und ein sogenannter Pyramidenstumpf.

   (Hinweis: Ähnlichkeit! Strahlensatz!)




2. ABCDEFGH ist ein Würfel mit der Kantenlänge 8,0cm.
   In ihm schneiden sich zwei Diagonalflächen. Dabei entsteht eine Pyramide mit den Ecken E, F, G, H und B.

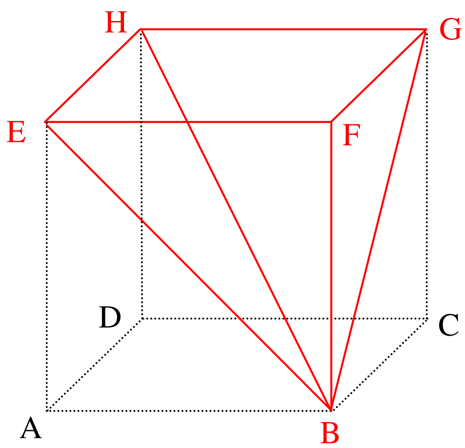
   a) Beschreibe die Pyramide mit eigenen Worten und berechne alle Kantenlängen.

   Zeichne und miss auf Grad genau die Winkel zwischen

   b) Seiten- und Grundkanten,

   c) Seiten- und Grundflächen,

   Berechne nun die in b) und c) gezeichneten Winkel auf $0{,}1^{\circ}$ genau!

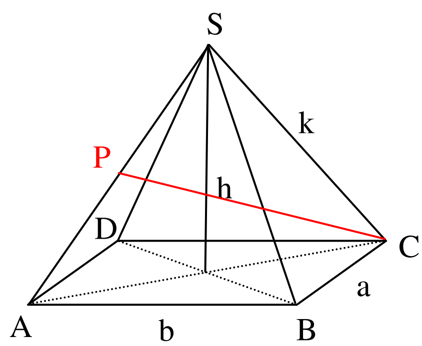



3. Eine gerade Pyramide besitzt als Grundfläche ein Rechteck mit den Seitenlängen $a = 3{,}0\text{cm}$ und $b = 4{,}0\text{cm}$. Die Spitze der Pyramide befindet sich in einem Abstand $h = 3{,}0\text{cm}$ über der Grundfläche.

   a) Berechne die Kantenlänge k und das Volumen V.

   b) Berechne alle Winkel zwischen den Kanten auf $0{,}1^{\circ}$ genau.
   Wie viele unterschiedliche Winkel gibt es?

   c) P ist die Mitte der Kante [AS].
   Berechne die Größe von ∢ PCA und von ∢ SCP auf $0{,}1^{\circ}$ genau.



1. $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ und $V_1 = \frac{1}{3} \cdot G_1 \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot V$ ; $G = a \cdot a$ und $G_1 = a_1 \cdot a_1$

   Strahlensatz:

   $$\frac{h_1}{h} = \frac{a_1}{a} \quad \text{also} \quad \frac{1}{2} = \frac{V_1}{V} = \frac{h_1 \cdot a_1 \cdot a_1}{h \cdot a \cdot a} = \frac{h_1^3}{h^3} \Rightarrow h_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\, h = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\, h \approx 0{,}79\, h$$

2. a) Es handelt sich um eine schiefe Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die Spitze befindet sich senkrecht über einer Ecke des Quadrats.

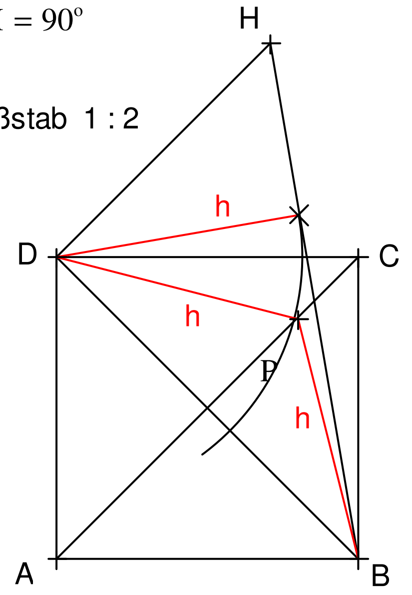
   b) $\sphericalangle FEH = \sphericalangle GFE = \sphericalangle HGF = \sphericalangle EHG = \sphericalangle GFB = \sphericalangle BEH = 90^\circ$

   $\sphericalangle BEF = \sphericalangle FBE = \sphericalangle GBF = \sphericalangle FGB = 45^\circ$

   $\Delta BEH \cong \Delta BGH \cong \Delta BHD$ und daher

   $\sphericalangle HBE = \sphericalangle GBH = \varphi$ mit

   $$\tan\varphi = \frac{\overline{DH}}{\overline{DB}} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi \approx 35{,}3^\circ$$




   c) Folgende Ebenen stehen senkrecht zueinander:
   E(EFG) und E(EBF) und E(GFB)

   $45^\circ$ bestehen zwischen
   E(HEB) und E(EFG) sowie zwischen
   E(BGH) und E(EFG)

   Um den Winkel zwischen E(HEB) und E(BGH) zu ermitteln, fällt man z.B. das Lot von E bzw. G auf die Raumdiagonale HB. Dieses Lot hat die Länge h wie im Bild dargestellt und der Winkel zwischen den beiden Ebenen entspricht damit dem Winkel $\sphericalangle DPB = 120^\circ$.

   $$\overline{HB}^2 = a^2 + (\sqrt{2}\,a)^2 = 3a^2 \Rightarrow \overline{HB} = \sqrt{3}\,a$$

   $$\frac{1}{2} \cdot h \cdot \overline{HB} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \overline{DB} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot h \cdot \sqrt{3}\,a = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{2}\,a \Rightarrow h = \sqrt{\frac{2}{3}}\,a$$

   $$\sphericalangle DPB = 2 \cdot \varepsilon \text{ mit } \sin\varepsilon = \frac{0{,}5 \cdot \overline{DB}}{h} = \frac{0{,}5 \cdot \sqrt{2}\,a}{\sqrt{\frac{2}{3}}\,a} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \Rightarrow \varepsilon = 60^\circ \text{ und } \sphericalangle DPB = 120^\circ$$

3. a) $k^2 = h^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\right)^2 = h^2 + \frac{1}{2}\cdot(a^2+b^2) \Rightarrow$

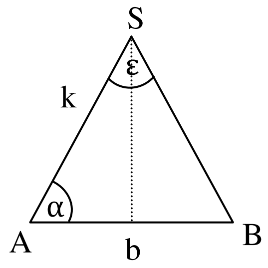
$$k = \sqrt{9+0,25\cdot(9+16)}\,\text{cm} = \sqrt{15,25}\,\text{cm} = \frac{\sqrt{61}}{2}\,\text{cm}\,;\ V = \frac{1}{3}a\cdot b\cdot h = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot 4\cdot 3\,\text{cm}^3 = 12\,\text{cm}^3$$

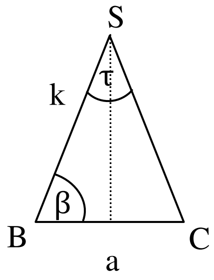
b) $\cos\alpha = \frac{0,5\cdot b}{k} = \frac{2}{0,5\cdot\sqrt{61}} = \frac{4}{\sqrt{61}} \Rightarrow$

$\alpha \approx 59,2^\circ$ und $\varepsilon = 180^\circ - 2\cdot\alpha \approx 61,6^\circ$

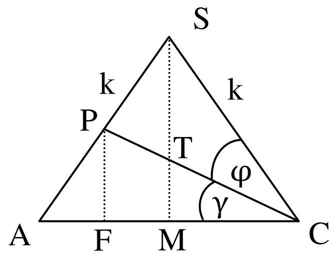
$\cos\beta = \frac{0,5\cdot a}{k} = \frac{1,5}{0,5\cdot\sqrt{61}} = \frac{3}{\sqrt{61}} \Rightarrow$

$\beta \approx 67,4^\circ$ und $\tau = 180^\circ - 2\cdot\beta \approx 45,2^\circ$




c) $\frac{2}{1} = \frac{\overline{SA}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{SM}}{\overline{PF}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AF}} \Rightarrow \overline{PF} = \frac{1}{2}\cdot\overline{SM}$ und $\overline{FC} = \frac{3}{4}\cdot\overline{AC}$




$$\tan\gamma = \frac{\overline{PF}}{\overline{FC}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot h}{\frac{3}{4}\cdot\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{2\cdot 3\text{cm}}{3\cdot\sqrt{9+16}\,\text{cm}} = \frac{2}{5} \Rightarrow$$

$\gamma = \tan^{-1}(0,4) \approx 21,8^\circ$

$$\tan(\gamma+\varphi) = \frac{\overline{SM}}{\overline{MC}} = \frac{h}{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{2\cdot 3\text{cm}}{\sqrt{9+16}\,\text{cm}} = \frac{6}{5} \Rightarrow \gamma+\varphi \approx 50,2^\circ \text{ und } \varphi \approx 28,4^\circ$$