Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Rechnen mit reellen Zahlen

1. Bestimme die maximale Definitionsmenge des Terms.

a) $\sqrt{2x}$ b) $\sqrt{2-x}$ c) $\sqrt{2x+6}$

d) $\sqrt{-x} + \sqrt{x+4}$ e) $\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}$ f) $\dfrac{3\cdot\sqrt{2x+3}}{\sqrt{x}-2}$

Beachte im Folgenden:

Alle Endergebnisse werden immer so weit wie möglich radiziert, der Nenner wird immer rational gemacht.

2. Radiziere so weit wie möglich. (Es gelte $a > 0$, $b > 0$, $c \in R$)

a) $\sqrt{49+626}$ b) $\sqrt{960}$ c) $\sqrt{12\cdot 28\cdot 21}$

d) $\sqrt{8ab^2}$ e) $\sqrt{18b^3c^2}$ f) $\sqrt{30a^2\cdot 105c^3}$

3. Mache den Nenner rational!

a) $\dfrac{2}{\sqrt{75}}$ b) $\dfrac{2}{3+\sqrt{5}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

d) $\sqrt{3\frac{1}{8}}$ e) $\sqrt{22{,}05}$ f) $\sqrt{1\frac{2}{5}+2\frac{1}{3}}$

4. Vereinfache den Term

a) $\sqrt{11+\sqrt{19+\sqrt{2\cdot 18}}}$ b) $2\cdot\sqrt{6}\cdot\left(\sqrt{12}+\sqrt{18}\right)-\sqrt{3}\cdot(12+3\sqrt{6})$

c) $\left(\sqrt{8}-3\cdot\sqrt{18}+2\cdot\sqrt{32}\right)\cdot\sqrt{2}$ d) $\left(3\cdot\sqrt{5}-\sqrt{20}+\sqrt{80}\right)\cdot 2\sqrt{5}$

e) $\dfrac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3+\sqrt{10}}$ f) $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{6}+2}$

5. Berechne mit dem Taschenrechner und runde das Ergebnis auf Hundertstel.

a) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}+\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}$ b) $\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{12}-\sqrt{11}}$

c) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4+\sqrt{5}}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}$ d) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{13}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}}+3}$

Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Rechnen mit reellen Zahlen * Lösungen

1. a) $\sqrt{2x}$; $D = R_o^+$ b) $\sqrt{2-x}$; $D =]-\infty; 2]$

   c) $\sqrt{2x+6}$; $D = [-3 ; \infty[$ d) $\sqrt{-x} + \sqrt{x+4}$; $D = [-4 ; 0]$

   e) $\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}$; $D = R_o^+ \backslash \{1\}$ f) $\dfrac{3\cdot\sqrt{2x+3}}{\sqrt{x}-2}$; $D = R_o^+ \backslash \{4\}$

2. a) $\sqrt{49+626} = \sqrt{675} = \sqrt{25\cdot 9\cdot 3} = 5\cdot 3\cdot\sqrt{3} = 15\sqrt{3}$

   b) $\sqrt{960} = \sqrt{64\cdot 15} = 8\sqrt{15}$

   c) $\sqrt{12\cdot 28\cdot 21} = \sqrt{4\cdot 3\cdot 4\cdot 7\cdot 3\cdot 7} = \sqrt{4^2\cdot 3^2\cdot 7^2} = 4\cdot 3\cdot 7 = 84$

   d) $\sqrt{8ab^2} = \sqrt{4b^2\cdot 2a} = 2b\cdot\sqrt{2a}$ (denn $b \geq 0$)

   e) $\sqrt{18b^3c^2} = \sqrt{9\cdot b^2\cdot c^2\cdot 2b} = 3\cdot b\cdot|c|\cdot\sqrt{2b} = 3b|c|\sqrt{2b}$ (denn $c \in R$)

   f) $\sqrt{30a^2\cdot 105c^3} = \sqrt{3\cdot 2\cdot 5\cdot a^2\cdot 5\cdot 3\cdot 7\cdot c^2\cdot c} = \sqrt{3^2\cdot 5^2\cdot a^2\cdot c^2\cdot 14c} = 15ac\sqrt{14c}$

   (c muss hier µ 0 sein, denn für $c < 0$ wäre der Radikand negativ. Man benötigt also keine Betragsstriche.)

3. a) $\dfrac{2}{\sqrt{75}} = \dfrac{2}{\sqrt{25\cdot 3}} = \dfrac{2\cdot\sqrt{3}}{5\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{5\cdot 3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{15}$

   b) $\dfrac{2}{3+\sqrt{5}} = \dfrac{2\cdot(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})\cdot(3-\sqrt{5})} = \dfrac{6-2\sqrt{5}}{9-5} = \dfrac{2\cdot(3-\sqrt{5})}{2\cdot 2} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

   c) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \dfrac{1\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-\sqrt{5})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{5})} = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{3-5} = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{-2} = -\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}$

   d) $\sqrt{3\frac{1}{8}} = \sqrt{\dfrac{25}{8}} = \sqrt{\dfrac{25\cdot 2}{4\cdot 2\cdot 2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{4} = (1{,}25\sqrt{2})$

   e) $\sqrt{22{,}05} = \sqrt{\dfrac{2205}{100}} = \sqrt{\dfrac{5\cdot 9\cdot 49}{100}} = \dfrac{3\cdot 7\cdot\sqrt{5}}{10} = \dfrac{21\sqrt{5}}{10}$ $(= 2{,}1\sqrt{5})$

   f) $\sqrt{1\frac{2}{5} + 2\frac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{7\cdot 3}{5\cdot 3} + \dfrac{7\cdot 5}{3\cdot 5}} = \sqrt{\dfrac{21+35}{15}} = \sqrt{\dfrac{56\cdot 15}{15\cdot 15}} = \dfrac{\sqrt{4\cdot 2\cdot 7\cdot 3\cdot 5}}{15} = \dfrac{2\sqrt{210}}{15}$

4. a) $\sqrt{11+\sqrt{19+\sqrt{2\cdot 18}}} = \sqrt{11+\sqrt{19+6}} = \sqrt{11+5} = \sqrt{16} = 4$

b) $2\cdot\sqrt{6}\cdot\left(\sqrt{12}+\sqrt{18}\right) - \sqrt{3}\cdot(12+3\sqrt{6}) = 2\cdot\sqrt{6\cdot 6\cdot 2} + 2\cdot\sqrt{6\cdot 6\cdot 3} = 12\sqrt{2} + 12\sqrt{3}$

c) $\left(\sqrt{8} - 3\cdot\sqrt{18} + 2\cdot\sqrt{32}\right)\cdot\sqrt{2} = \sqrt{8\cdot 2} - 3\cdot\sqrt{18\cdot 2} + 2\cdot\sqrt{32\cdot 2} = 4 - 3\cdot 6 + 2\cdot 8 = 2$

d) $\left(3\cdot\sqrt{5} - \sqrt{20} + \sqrt{80}\right)\cdot 2\sqrt{5} = \left(3\cdot\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}\right)\cdot 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5} = 10\cdot 5 = 50$

e) $\dfrac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3+\sqrt{10}} = \dfrac{(2\sqrt{5}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{10}-3)}{(3+\sqrt{10})\cdot(\sqrt{10}-3)} = \dfrac{2\sqrt{5\cdot 10} - 6\sqrt{5} - \sqrt{2\cdot 10} + 3\sqrt{2}}{10-9} =$

$2\cdot 5\cdot\sqrt{2} - 6\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{2} = 13\sqrt{2} - 8\sqrt{5}$

f) $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{6}+2} = \dfrac{(2\sqrt{3}-\sqrt{6})\cdot(\sqrt{6}-2)}{(\sqrt{6}+2)\cdot(\sqrt{6}-2)} = \dfrac{2\sqrt{18} - 4\sqrt{3} - 6 + 2\sqrt{6}}{6-4} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 3 + \sqrt{6}$

5. a) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} + \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}} = 2{,}23771042... \approx 2{,}24$

b) $\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{12}-\sqrt{11}} = 24{,}4482567... \approx 24{,}45$

c) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4+\sqrt{5}}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{7}} = 0{,}40908243... \approx 0{,}41$

d) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{13}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}} + 3} = 1{,}85181953... \approx 1{,}85$