Aufgaben zur Kurvendiskussion für die Jahrgangsstufe 11

1. Führen Sie jeweils die Kurvendiskussion durch und skizzieren Sie anschließend den Graphen unter Verwendung Ihrer Ergebnisse

   a) $f(x) = 0{,}1x^3 + 0{,}3x^2 - 0{,}9x + 0{,}5$

   b) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$

   c) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2$

   d) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

   e) $f(x) = 0{,}2x^3 - 1{,}5x^2 + 2{,}4x$

   f) $f(x) = \frac{4x+4}{x^2+1}$

2. Führen Sie auch für diese Funktionen jeweils eine Kurvendiskussion durch und skizzieren Sie den Graphen unter Verwendung Ihrer Ergebnisse.

a) $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^2$

b) $f(x) = (x^2 - 1)\cdot|x^2 - 4|$

c) $f(x) = x^2\cdot|4 - x^2|$

d) $f(x) = 0{,}2x^3 - 3{,}9x^2 + 24x - 47{,}5$

e) $f(x) = \frac{1}{8}(x^4 - 8x^2 - 9)$

f) $f(x) = -0{,}25x^4 + 1{,}5x^2 - 2x - 2$

g) $f(x) = \frac{2x^2 - 18}{(x+2)^2}$

h) $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 1}$

3. Bestimmen Sie jeweils eine ganzrationale Funktion (Polynomfunktion) mit den folgenden Eigenschaften. Lassen Sie anschließend den Graphen mit einem geeigneten Programm am PC darstellen.

   a) Die Funktion hat den Grad 3, P(1/4) liegt auf dem Graphen, W(3/6) ist Wendepunkt und an der Stelle $x_1 = 4$ befindet sich eine horizontale Tangente.

   b) Die Funktion hat den Grad 3, die Tangente an den Graphen im Punkt P(3/ ?) hat die Gleichung $y = 11x - 27$ und W(1/0) ist Wendepunkt.

   c) Die Funktion hat den Grad 4, ist achsensymmetrisch zur y-Achse, hat bei $x_1 = 2{,}5$ eine Nullstelle und an der Stelle $x_2 = 1$ einen Wendepunkt.

4. Gibt es eine Funktion f mit $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ (mit b, c und $d \in R$), die folgende Eigenschaft hat? Bestimmen Sie jeweils b, c und d.

   a) G_f hat den Wendepunkt W(0/3) .

   b) G_f hat den Wendepunkt W(0/?) und den Hochpunkt H(-2/?) .

   c) G_f hat den Wendepunkt W(0/?) und den Tiefpunkt T(-2/?) .

   d) G_f hat den Hochpunktpunkt H(1/3) und eine Nullstelle bei $x_1 = -1$.

   e) G_f hat den Terrassenpunkt (1/ -5) .

   f) G_f hat den Terrassenpunkt (1/ -5) und eine Nullstelle bei $x_1 = 2$.

Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit geeigneter Software!

Aufgaben zur Kurvendiskussion für die Jahrgangsstufe 11

Lösungen zur Aufgabe 1.
Wichtige Punkte der Graphen zu den oben angegebenen Funktionen.

a) Nullstellen: $x_1 = -5$; $x_2 = 1$; HOP (-3 / 3,20) TIP (1 / 0) WP (-1 / 1,60)
b) Nullstellen: $x_1 = 0$; TIP (0 / 0) WP_1 (0,33 / 0,41) TerrP (1 / 1)
c) Nullstellen: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; TIP_1 (0 / 0) TIP_2 (2,59 / - 1,62)
HOP (1,16 / 2,08) WP_1 (0,50 / 0,94) WP_2 (2 / 0)
d) $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; TIP_1 (0 / 0) TIP_2 (2 / 0) HOP (1 / 1)
WP_1 (0,42 / 0,44) WP_2 (1,58 / 0,44) (Achsensymmetrie zu x = 1)
e) Nullstellen: $x_1 = 0$; $x_2 = 2{,}31$; $x_3 = 5{,}19$; HOP (1 / 1,10) TIP (4 / -1,60)
WP (2,50 / - 0,25)
f) Nullstellen: $x_1 = -1 / 0$) ; TIP (- 2,41 / - 0,83) HOP (0,41 / 4,83)
WP_1 (-3,73 / -0,73) WP_2 (- 0,27 / 2,73) WP_3 (1 / 4)

Lösung zur Aufgabe 2 nur an einem Beispiel, nämlich 2c

$$f(x) = x^2 \cdot \left| 4 - x^2 \right| = \begin{cases} x^2 \cdot (4 - x^2) & ; \quad -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 \cdot (x^2 - 4) & ; \qquad sonst \end{cases}$$

$$h(x) = x^2 \cdot (4 - x^2) = -x^4 + 4x^2$$

G_h ist achsensymmetrisch zur y-Achse
mit $\lim\limits_{x \to \pm\infty} h(x) = -\infty$

$$h'(x) = -4x^3 + 8x = 4x \cdot (2 - x^2)$$
$$h''(x) = -12x^2 + 8 = 4 \cdot (2 - 3x^2)$$

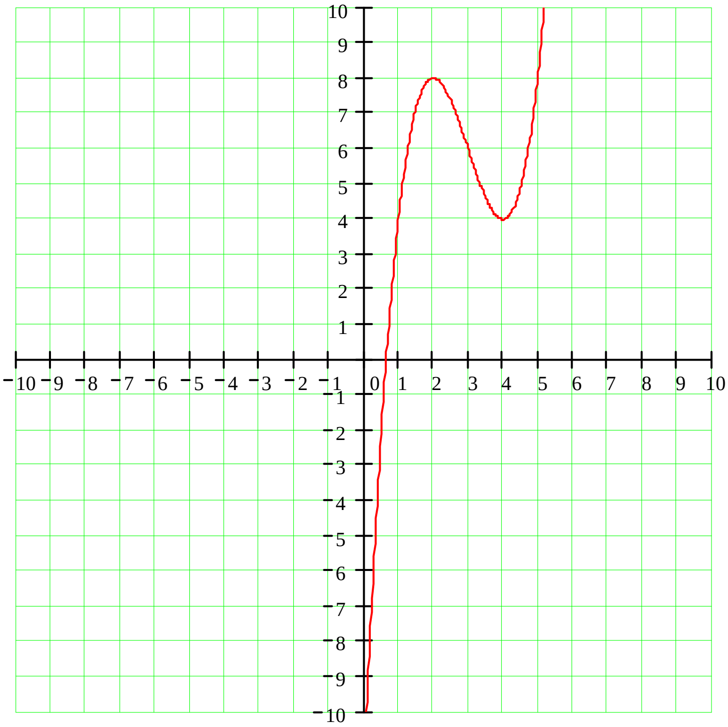
Nullstellen:	doppelte Nullstelle (0/0)
	einfache Nullstellen (-2/0) ; (+2/0)
Horizontale Tangenten:	TIP (0/0)
	$HOP_1(-\sqrt{2}/4)$; $HOP_2(\sqrt{2}/4)$
Flachpunkte:	$WP_1(-\frac{\sqrt{6}}{3}/\frac{20}{9}) \approx (-0{,}82/2{,}22)$
	$WP_2(\frac{\sqrt{6}}{3}/\frac{20}{9}) \approx (0{,}82/2{,}22)$

G_f entsteht aus G_h , indem man G_h im Bereich $x > 2$ und $x < -2$ an der x-Achse spiegelt und im Bereich $-2 \leq x \leq 2$ einfach übernimmt.

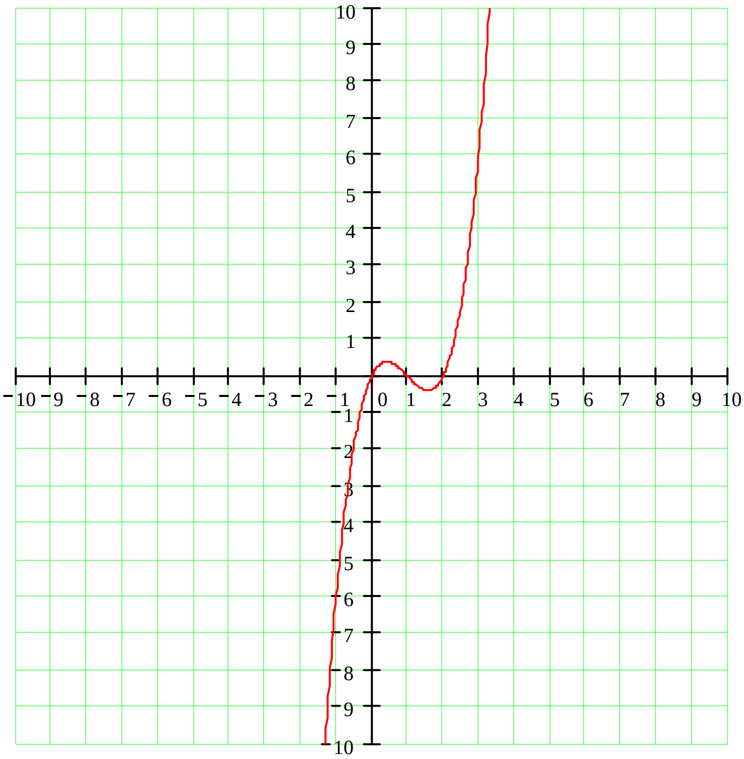
Aufgaben zur Kurvendiskussion für die Jahrgangsstufe 11

Lösungen:

3. a) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12$



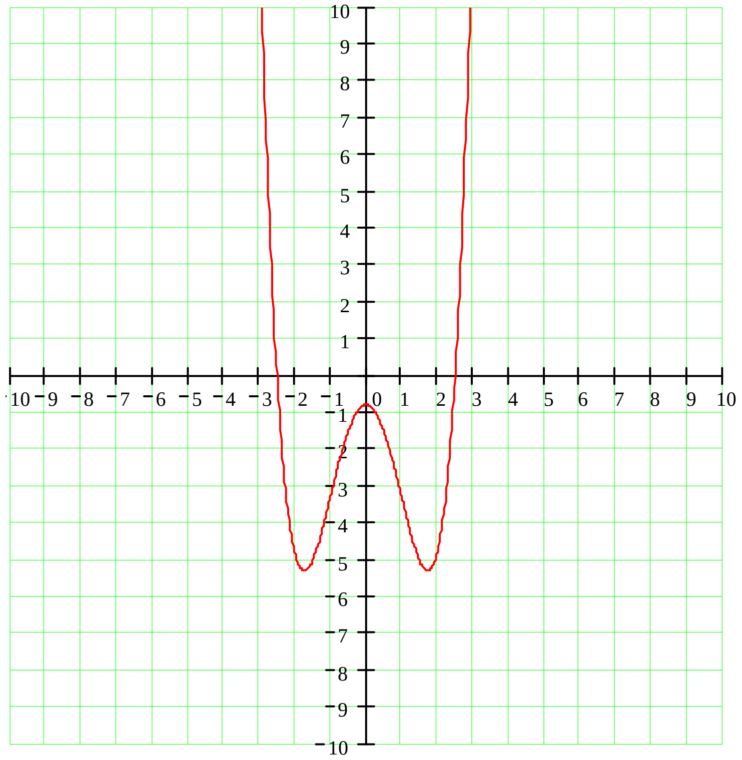
3. b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$



Aufgaben zur Kurvendiskussion für die Jahrgangsstufe 11

3. c) $f(x) = ax^4 - 6ax^2 - \frac{25a}{16}$ und a beliebig $(a \neq 0)$

z.B. $a = 0{,}5$ und damit $f(x) = 0{,}5\left(x^4 - 6x^2 - \frac{25}{16}\right)$



4. a) $f(x) = x^3 + cx + 3$ und c beliebig

b) $f(x) = x^3 - 12x + d$ und d beliebig

c) Ergebnis wie bei 4 b); trotzdem nicht möglich, da bei $x_0 = -2$ ein Hochpunkt und kein Tiefpunkt liegt!

d) Rechnung liefert $f(x) = x^3 - 1{,}75x^2 + 0{,}5x + 3{,}25$, aber Aufgabe trotzdem nicht erfüllbar, da bei H(1/3) ein Tiefpunkt liegt!

e) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 6$

f) Der Funktionsterm müsste dem von Aufgabe 4 e entsprechen, aber für f von 4e gilt $f(2) = -4 \neq 0$;
d.h. die Aufgabe 4 f) hat keine Lösung.