Wahlintensivierung Mathematik * Jahrgangsstufe 11 * G9

Vermischte Aufgaben zur Ableitungsfunktion

1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

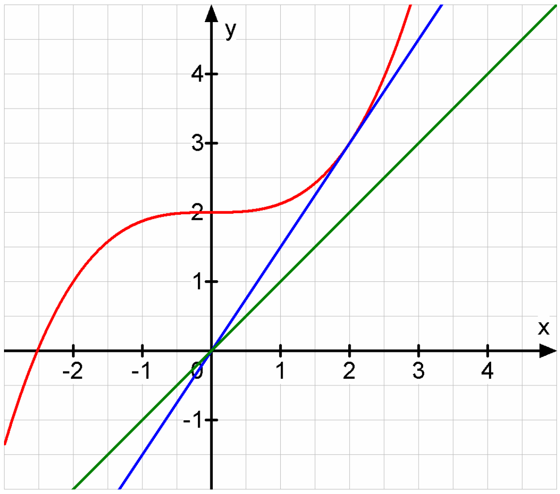
   a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f und untersuchen Sie das Verhalten von $f(x)$ für $x \to \pm\infty$.

   b) Bestimmen Sie alle Punkte des Graphen, in denen die Graphentangente parallel zur x-Achse verläuft.

   c) Unter welchem Winkel schneidet der Graph von f die x-Achse?

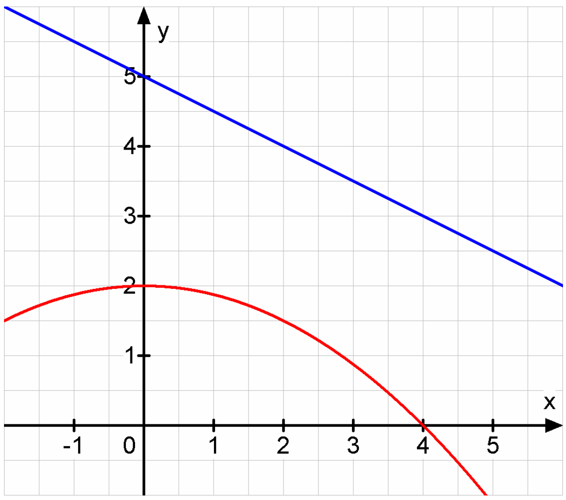
   d) Bestimmen Sie die Tangente t und die Normale n zum Graphen im Punkt $P(1/?)$.

   e) Bestimmen Sie eine Tangente an den Graphen von f, die parallel zur Geraden mit der Funktionsgleichung $y = 3{,}75\,x$ ist.



2. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^3 + 2$ und zwei Ursprungsgeraden.

   Bestimmen Sie rechnerisch diejenige (blaue) Ursprungsgerade, die den Graphen von f berührt.



3. a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der Geraden und der Parabel.

   b) Bestimmen Sie den Punkt T auf der Geraden, der von der Parabel den kleinsten Abstand hat und berechnen Sie diesen Abstand!
   (Hinweis: Welche Lage muss die Tangente an die Parabel im Punkt T haben?)

Wahlintensivierung Mathematik * Jahrgangsstufe 11 * G9
Vermischte Aufgaben zur Ableitungsfunktion * Lösungen

1. a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ durch Raten und Ausprobieren: $x_1 = -1$

Faktorisieren: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4 = (x+1)\cdot(x^2 - 4x + 4) = (x+1)\cdot(x-2)^2$

Einfache Nullstelle $x_1 = -1$, doppelte Nullstelle $x_2 = 2$

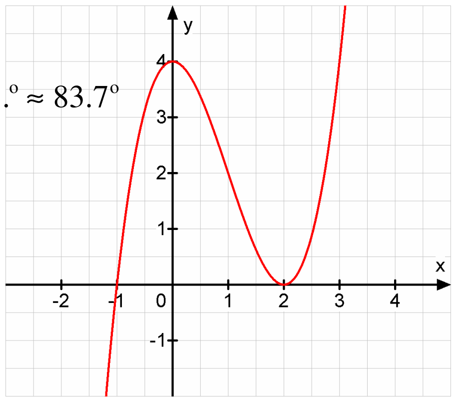
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^3(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3}) = \pm\infty\cdot(1\mp 0 \pm 0) = \pm\infty$$

b) $f'(x) = 3x^2 - 6x$; Tangente parallel zur $x-$Achse $\Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0$

An den Stellen $x_0 = 0$ und $x_2 = 2$ verlaufen die Tangenten waagrecht.
Das sind die Punkt P(0/4) und Q(2/0).

c) Im Punkt Q(2/0) berührt der Graph von f die x-Achse.
Schnittwinkel φ im Punkt S(-1/0):

$\tan(\varphi) = f'(-1) = 3+6 = 9 \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}(9) = 83{,}659...^\circ \approx 83.7^\circ$



d) $f(1) = 1-3+4 = 2$ also $P(1/2)$

$f'(1) = 3 - 6 = -3$ Tangente: $y = -3\cdot x + t$

$P(1/2)$ eingesetzt liefert $t = 5$ also $y = -3\cdot x + 5$

Normale $y = +\frac{1}{3}\cdot x + t$; $P(1/2)$ einsetzen

$\Rightarrow t = \frac{5}{3}$ und $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

e) $f'(x) = 3{,}75 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 3{,}75 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{1}{6}(6 \pm \sqrt{36 + 4\cdot 3\cdot 3{,}75}) = 1 \pm 1{,}5$

Z.B. P(2,5/0,875) : Die Tangente in P(2,5/0,875) hat die Gleichung $y = 3{,}75x - 8{,}5$.

2. Gesuchte Ursprungsgerade $y = m\cdot x$. Für den Berührpunkt $B(x_B/y_B)$ muss gelten:

(1) $\frac{1}{8}x_B^3 + 2 = m\cdot x_B$ (2) $f'(x_B) = m \Leftrightarrow \frac{3}{8}x_B^2 = m$

(2) in (1) eingesetzt: $\frac{1}{8}x_B^3 + 2 = \frac{3}{8}x_B^2\cdot x_B \Leftrightarrow 2 = \frac{2}{8}x_B^3 \Leftrightarrow x_B^3 = 8$

$\Leftrightarrow x_B = 2$ also $B(2/3)$ und $m = \frac{3}{8}\cdot 2^2 = 1{,}5$

Die gesuchte Ursprungsgerade lautet also $y = 1{,}5x$.

3. a) Gerade: $g(x) = 5 - 0{,}5x$; Parabel $p(x) = 2 - \frac{1}{8}x^2$

b) Die Tangente im Berührpunkt $B(x_B/y_B)$ muss parallel zur Geraden verlaufen.

$p'(x_B) = -0{,}5 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x_B = -0{,}5 \Leftrightarrow x_B = 2$ also B(2/1,5)

Errichte nun in B die Normale zum Graphen:

Normale $n(x) = m\cdot x + t$ mit $m = -\frac{1}{p'(2)} = -\frac{1}{-0{,}25\cdot 2} = 2$

B(2/1,5) in die Normale eingesetzt liefert $1{,}5 = 2\cdot 2 + t$ also $t = -2{,}5$

Normale $n(x) = 2x - 2{,}5$ geschnitten mit der Geraden $g(x) = 5 - 0{,}5x$ liefert

$n(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x - 2{,}5 = 5 - 0{,}5x \Leftrightarrow x = 3$ also Schnittpunkt $S(3/3{,}5)$

Der gesuchte kleinste Abstand beträgt $\overline{SB} = \sqrt{(3-2)^2 + (3{,}5-1{,}5)^2} = \sqrt{5} \approx 2{,}24$