2. Extemporale aus der Mathematik, Klasse 11a, 25.03.2009
Gruppe A

1. Berechnen Sie nach bekannten Regeln jeweils die Ableitung der Funktionen.
   Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

   a) $f(x) = 2 \cdot \sin(3x+4)$ b) $g(x) = \frac{1}{6} \cdot \left(3x^2+2\right)^4$ c) $h(x) = 2x^3 \cdot \cos(3x)$

2. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{2x^2+20}$, $D_f = \mathbb{R}$.

   a) Ermitteln Sie mit Hilfe der ersten Ableitung alle Punkte des Graphen mit waagrechter Tangente.

   (Teilergebnis: $f'(x) = \dfrac{36x - 4x^3}{(2x^2+20)^2 \cdot \sqrt{2x^2+1}}$)

   b) Untersuchen Sie die Vorzeichenwechsel der Ableitungsfunktion (in Tabellenform) und prüfen Sie so, ob es sich um Hoch-, Tief- oder Terrassenpunkte handelt!

Aufgabe	1a	b	c	2a	b	Summe
Punkte	2	3	3	7	5	20

Gutes Gelingen! G.R.

2. Extemporale aus der Mathematik, Klasse 11a, 25.03.2009
Gruppe B

1. Berechnen Sie nach bekannten Regeln jeweils die Ableitung der Funktionen.
   Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

   a) $f(x) = 4 \cdot \cos(3x+2)$ b) $g(x) = \frac{1}{6} \cdot \left(2x^3+1\right)^4$ b) $h(x) = 3x^2 \cdot \sin(2x)$

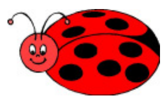
2. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{2x^2+10}$, $D_f = \mathbb{R}$.

   a) Ermitteln Sie mit Hilfe der ersten Ableitung alle Punkte des Graphen mit waagrechter Tangente.

   (Teilergebnis: $f'(x) = \dfrac{16x - 4x^3}{(2x^2+10)^2 \cdot \sqrt{2x^2+1}}$)

   b) Untersuchen Sie die Vorzeichenwechsel der Ableitungsfunktion (in Tabellenform) und prüfen Sie so, ob es sich um Hoch-, Tief- oder Terrassenpunkte handelt!

Aufgabe	1a	b	c	2a	b	Summe
Punkte	2	3	3	7	5	20



Gutes Gelingen! G.R.

2. Extemporale aus der Mathematik, Klasse 11a, 25.03.2009 * Lösung * Gruppe A

1. a) $f'(x) = 2 \cdot \cos(3x+4) \cdot 3 = 6 \cdot \cos(3x+4)$

b) $g'(x) = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot \left(3x^2 + 2 \right)^3 \cdot 3 \cdot 2x = 4x \cdot \left(3x^2 + 2 \right)^3$

c) $h'(x) = 2 \cdot 3x^2 \cdot \cos(3x) + 2x^3 \cdot (-\sin(3x)) \cdot 3 = 6x^2 \cdot \cos(3x) - 6x^3 \cdot \sin(3x)$

$= 6x^2 \cdot (\cos(3x) - x \cdot \sin(3x))$

2. a) $$f'(x) = \frac{(2x^2+20) \cdot \frac{4x}{2 \cdot \sqrt{2x^2+1}} - \sqrt{2x^2+1} \cdot 4x}{(2x^2+20)^2} =$$

$$\frac{(2x^2+20) \cdot 2x - (2x^2+1) \cdot 4x}{\sqrt{2x^2+1} \cdot (2x^2+20)^2} = \frac{4x^3 + 40x - 8x^3 - 4x}{\sqrt{2x^2+1} \cdot (2x^2+20)^2} = \frac{-4x^3 + 36x}{\sqrt{2x^2+1} \cdot (2x^2+20)^2}$$

horizontale Tangenten:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 36x = 0 \Leftrightarrow 4x \cdot (x^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \,;\, x_{2/3} = \pm 3$

waagrechte Tangenten in den Punkten $P_1(0 / \frac{1}{20})$, $P_2(3 / \frac{\sqrt{19}}{38})$ und $P_3(-3 / \frac{\sqrt{19}}{38})$.

b) $f'(x) = \frac{4x \cdot (9 - x^2)}{\sqrt{2x^2+1} \cdot (2x^2+20)^2}$; der Nenner ist für alle $x \in R$ positiv!

x	x < - 3	x = - 3	-3 < x < 0	x = 0	0 < x < 3	x = 3	3 < x
f ´(x)	> 0	0	< 0	0	> 0	0	< 0

Graph steigend fallend steigend fallend

Tiefpunkt $P_1(0 / \frac{1}{20})$, Hochpunkt $P_2(3 / \frac{\sqrt{19}}{38})$, Hochpunkt $P_3(-3 / \frac{\sqrt{19}}{38})$

2. Extemporale aus der Mathematik, Klasse 11a, 25.03.2009 * Lösung * Gruppe B

1\. a) $f'(x) = -4 \cdot \sin(3x+2) \cdot 3 = -12 \cdot \sin(3x+2)$

b) $g'(x) = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot \left(2x^3+1\right)^3 \cdot 2 \cdot 3x^2 = 4x^2 \cdot \left(2x^3+1\right)^3$

c) $h'(x) = 3 \cdot 2x \cdot \sin\left(2x\right) + 3x^2 \cdot \cos(2x) \cdot 2 = 6x \cdot \sin(2x) + 6x^2 \cdot \cos(2x)$
$= 6x \cdot (\sin(2x) + x \cdot \cos(2x))$

2\. a) $$f'(x) = \frac{(2x^2+10) \cdot \frac{4x}{2 \cdot \sqrt{2x^2+1}} - \sqrt{2x^2+1} \cdot 4x}{(2x^2+10)^2} =$$

$$\frac{(2x^2+10) \cdot 2x - (2x^2+1) \cdot 4x}{\sqrt{2x^2+1} \cdot (2x^2+10)^2} = \frac{4x^3 + 20x - 8x^3 - 4x}{\sqrt{2x^2+1} \cdot (2x^2+10)^2} = \frac{-4x^3 + 16x}{\sqrt{2x^2+1} \cdot (2x^2+10)^2}$$

horizontale Tangenten:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 16x = 0 \Leftrightarrow 4x \cdot (x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \,;\, x_{2/3} = \pm 2$

waagrechte Tangenten in den Punkten $P_1(0 / \frac{1}{10})$, $P_2(2 / \frac{1}{6})$ und $P_3(-2 / \frac{1}{6})$.

b) $$f'(x) = \frac{4x \cdot (4 - x^2)}{\sqrt{2x^2+1} \cdot (2x^2+10)^2}$$; der Nenner ist für alle $x \in R$ positiv!

x	x < - 2	x = - 2	-2 < x < 0	x = 0	0 < x < 2	x = 2	2 < x
f ´(x)	> 0	0	< 0	0	> 0	0	< 0

Graph steigend fallend steigend fallend

Tiefpunkt $P_1(0 / \frac{1}{10})$, Hochpunkt $P_2(2 / \frac{1}{6})$, Hochpunkt $P_3(-2 / \frac{1}{6})$