Mathematik * Jahrgangsstufe 11 * Hoch- und Tiefpunkte eines Graphen

Musteraufgabe:

Für $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2+9}}{2x^2+1}$ gilt $D_f = \mathbb{R}$ und

$$f'(x) = \frac{(2x^2+1)\cdot\dfrac{8x}{2\cdot\sqrt{4x^2+9}} - \sqrt{4x^2+9}\cdot 4x}{(2x^2+1)^2} = \frac{(2x^2+1)\cdot 4x - (4x^2+9)\cdot 4x}{(2x^2+1)^2\cdot\sqrt{4x^2+9}} =$$

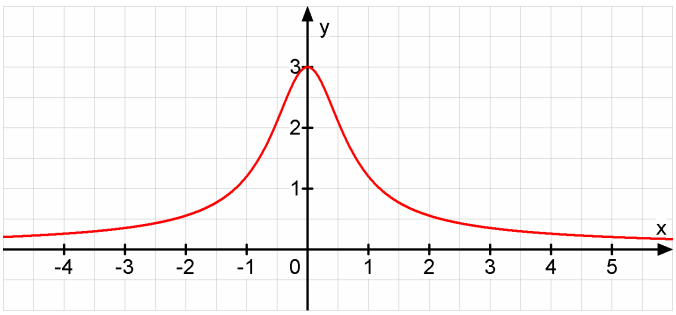
$$\frac{8x^3+4x-16x^3-36x}{(2x^2+1)^2\cdot\sqrt{4x^2+9}} = \frac{-8x^3-32x}{(2x^2+1)^2\cdot\sqrt{4x^2+9}} = \frac{-4x(x^2+4)}{(2x^2+1)^2\cdot\sqrt{4x^2+9}}$$

horizontale Tangenten: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x(x^2+4) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$

Vorzeichenwechsel der Ableitung:

x	x < 0	x = 0	0 < x
f ´(x)	> 0	0	< 0

Also hat der Graph von f
Bei (0 / 3) einen Hochpunkt.



Aufgaben:

Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion und ermitteln Sie dann mit Hilfe der ersten Ableitung alle Punkte des Graphen mit waagrechter Tangente.
Untersuchen Sie die Vorzeichenwechsel der Ableitungsfunktion (in Tabellenform) und prüfen Sie so, ob es sich um Hoch-, Tief- oder Terrassenpunkte handelt!

a) $f(x) = \dfrac{4x^2}{2x^2+1}$

b) $g(x) = \dfrac{6\cdot\sqrt{2x^2+1}}{x^2+5}$

c) $h(x) = \dfrac{5\cdot\sqrt{0,5x^2+x}}{x^2}$

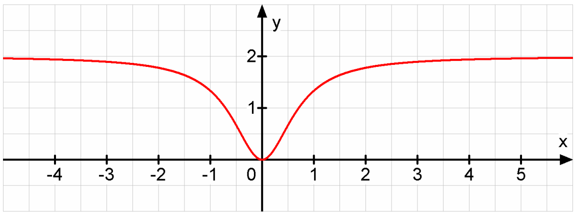
d) $k(x) = \dfrac{6\cdot\sqrt{0,5x^2+x}}{x^2+2}$

Mathematik * Jahrgangsstufe 11 * Hoch- und Tiefpunkte eines Graphen * Lösungen

a) $D_g = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{8x}{(2x^2+1)^2}$$

$f'(x) = 0 \iff x_1 = 0$

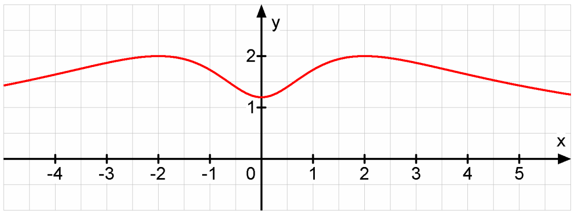


x	x < 0	x = 0	0 < x
f´(x)	< 0	0	> 0

b) $D_g = \mathbb{R}$

$$g'(x) = \frac{12x \cdot (4-x^2)}{(x^2+5)^2 \cdot \sqrt{2x^2+1}}$$

$h'(x) = 0 \iff x_1 = 0\,;\; x_{2/3} = \pm 2$

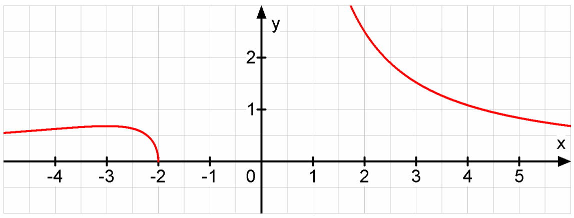


x	x < -2	x = -2	-2 < x < 0	x = 0	0 < x < 2	x = 2	2 < x
g´(x)	> 0	0	< 0	0	> 0	0	< 0

c) $D_h = \mathbb{R} \setminus \,]-2\,;0]$

$$h'(x) = \frac{-5 \cdot x^2 (3+x)}{2x^4 \cdot \sqrt{0{,}5x^2 + x}}$$

$h'(x) = 0 \iff x_1 = -3$



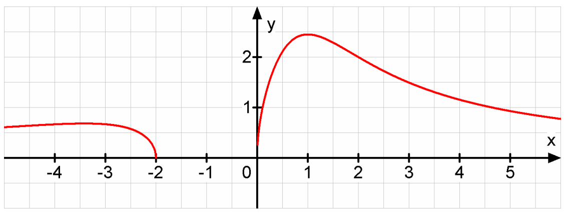
x	x < -3	x = -3	-3 < x < -2	0 < x
h´(x)	> 0	0	< 0	< 0

d) $D_k = \mathbb{R} \setminus \,]-2\,;0[$

$$k'(x) = \frac{3 \cdot (2+2x-3x^2-x^3)}{(x^2+2)^2 \cdot \sqrt{0{,}5x^2+x}} =$$

$$\frac{-3 \cdot (x-1) \cdot (x+2-\sqrt{2}) \cdot (x+2+\sqrt{2})}{(x^2+2)^2 \cdot \sqrt{0{,}5x^2+x}}$$

$k'(x) = 0 \iff x_1 = 1\,;\; x_2 = -2-\sqrt{2}$



x	$x < x_2$	$x = x_2$	$x_2 < x < -2$	0 < x < 1	x = 1	1 < x
k´(x)	> 0	0	< 0	> 0	0	< 0