2. Schulaufgabe aus der Mathematik * Klasse 11a * 14.01.2009 * Gruppe A

1. Bestimmen Sie – sofern vorhanden – die folgenden Grenzwerte.

   a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{2x - 6}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin(3x)}{4x + 3x^2}$ c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{|3x + 3|}{x^2 + x}$

2. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{0{,}5x^2 + x}{|x|} \cdot \operatorname{sgn}(x+2)$ und $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   a) Geben Sie die Funktion abschnittsweise ohne Verwendung von Betragsstrichen und ohne Verwendung der Signumfunktion an!

   b) Skizzieren Sie den Graphen!
   Ist die Funktion stetig? Ist die Funktion stetig fortsetzbar?
   Begründen Sie Ihre Antwort kurz!

3. Die Funktion f mit $f(x) = \begin{cases} ax^2 - bx + 1 & ; \ x < -1 \\ 2x - a & ; \ -1 \le x < 2 \\ bx^2 - ax + 1 & ; \ 2 \le x \end{cases}$ soll stetig sein.

   Welche Werte müssen a und b dafür besitzen?

4. Bestimmen Sie in der Grundmenge $\mathbb{C}$ alle Lösungen der Gleichung
   $z^2 + 4iz = 4 + 2i$

5. Die Gleichung $z^4 = -25$ soll untersucht werden.

   a) Wie viele verschiedene Lösungen dieser Gleichung gibt es in der Grundmenge $\mathbb{R}$ bzw. in der Grundmenge $\mathbb{C}$?

   b) Geben Sie aus der Menge der komplexen Zahlen diejenige Lösung der Gleichung an, für die sowohl der Real- wie der Imaginärteil negativ ist.

Aufgabe	1a	b	c	2a	b	3	4	5a	b	Summe
Punkte	2	2	2	3	4	4	8	2	2	29

Gutes Gelingen! G.R.

2. Schulaufgabe aus der Mathematik * Klasse 11a * 14.01.2009 * Gruppe B

1. Bestimmen Sie – sofern vorhanden – die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{2x - 8}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin(5x)}{4x + 3x^2}$ c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{|2 + 2x|}{x + x^2}$

2. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{-0{,}5x^2 + x}{|x|} \cdot \operatorname{sgn}(x-2)$ und $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) Geben Sie die Funktion abschnittsweise ohne Verwendung von Betragsstrichen und ohne Verwendung der Signumfunktion an!

b) Skizzieren Sie den Graphen!
Ist die Funktion stetig? Ist die Funktion stetig fortsetzbar?
Begründen Sie Ihre Antwort kurz!

3. Die Funktion f mit $f(x) = \begin{cases} bx^2 - ax & ; \ x < -1 \\ 2x - a + 1 & ; \ -1 \leq x < 2 \\ ax^2 - bx + 6 & ; \ 2 \leq x \end{cases}$ soll stetig sein.

Welche Werte müssen a und b dafür besitzen?

4. Bestimmen Sie in der Grundmenge $\mathbb{C}$ alle Lösungen der Gleichung
$z^2 + 6iz = 9 + 2i$

5. Die Gleichung $z^4 = -9$ soll untersucht werden.

a) Wie viele verschiedene Lösungen dieser Gleichung gibt es in der Grundmenge $\mathbb{R}$ bzw. in der Grundmenge $\mathbb{C}$?

b) Geben Sie aus der Menge der komplexen Zahlen diejenige Lösung der Gleichung an, für die sowohl der Real- wie der Imaginärteil negativ ist.

Aufgabe	1a	b	c	2a	b	3	4	5a	b	Summe
Punkte	2	2	2	3	4	4	8	2	2	29

Gutes Gelingen! G.R.

2. Schulaufgabe aus der Mathematik * Klasse 11a * 14.01.2009 * Gruppe A * Lösung

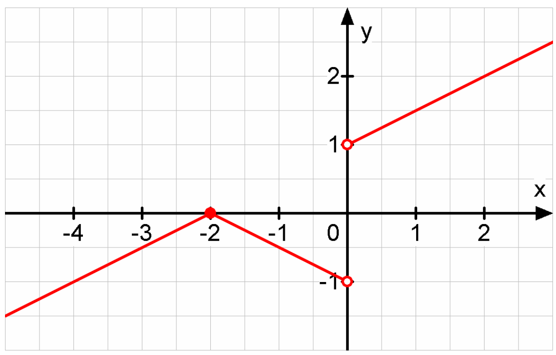
1. a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{2x-6}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)\cdot(x+2)}{2\cdot(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{3+2}{2}=2,5$

   b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin(3x)}{4x+3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cdot 2\cdot\sin(3x)}{3\cdot x\cdot(4+3x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{3x}\cdot\dfrac{3\cdot 2}{4+3x}=1\cdot\dfrac{6}{4+0}=1,5$

   c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|3x+3|}{x^2+x}=\lim\limits_{x\overset{>}{\underset{<}{\to}}-1}\dfrac{\pm 3\cdot(x+1)}{x\cdot(x+1)}=\lim\limits_{x\overset{>}{\underset{<}{\to}}-1}\dfrac{\pm 3}{x}=\dfrac{\pm 3}{-1}=\mp 3$ Der Grenzwert selbst existiert nicht!

2. a) $$f(x)=\frac{0,5x^2+x}{|x|}\cdot\operatorname{sgn}(x+2)=\begin{cases}0,5x+1 & ;\quad x<-2\\ 0 & ;\quad x=-2\\ -0,5x-1 & ;\quad -2<x<0\\ 0,5x+1 & ;\quad 0<x\end{cases}$$

   b)



Die Funktion ist an jeder Stelle des Definitionsbereichs stetig und damit stetig!

Eine stetige Fortsetzung von f ist an der Stelle $x_1=0$ nicht möglich, denn $1=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)\neq\lim\limits_{x\underset{<}{\to}0}f(x)=-1$

3. $$f(x)=\begin{cases}ax^2-bx+1 & ;\quad x<-1\\ 2x-a & ;\quad -1\le x<2\\ bx^2-ax+1 & ;\quad 2\le x\end{cases}$$

Stetigkeit bei $x_1=-1$: (1) $a+b+1=-2-a \;\Rightarrow\; b=-3-2a$

Stetigkeit bei $x_2=2$: (2) $4-a=4b-2a+1 \;\Rightarrow\; a=4b-3$ in (1)

$b=-3-8b+6 \;\Rightarrow\; 9b=3 \;\Rightarrow$

$b=\dfrac{1}{3}$ und $a=\dfrac{4}{3}-3=-\dfrac{5}{3}$

4. $z^2+4iz=4+2i \;\Leftrightarrow\; (z+2i)^2-(2i)^2=4+2i \;\Leftrightarrow\; (z+2i)^2=2i$ Substitution $z+2i=x+iy$

$\Rightarrow$ (1) $x^2-y^2=0$ und (2) $2xy=2 \;\Rightarrow\; y=\dfrac{1}{x}$ in (1)

$\Rightarrow\; x^2-\dfrac{1}{x^2}=0 \;\Rightarrow\; x^4=1 \;\Rightarrow\; x_{1/2}=\pm 1$ und $y_{1/2}=\pm 1 \;\Rightarrow$

$z_{1/2}+2i=\pm 1\pm i \;\Rightarrow\; z_1=1-i$ und $z_2=-1-3i$

5. a) $z^4=-25$ hat in $\mathbb{R}$ keine und in $\mathbb{C}$ genau vier verschiedene Lösungen.

   b) $z_n=\sqrt[4]{25}\cdot E\left(\dfrac{180^\circ}{4}+n\cdot\dfrac{360^\circ}{4}\right)$ mit $n=0,1,2,3$. Die gesuchte Lösung mit negativem

Real- und Imaginärteil ergibt sich für $n=2$ zu $z_2=\sqrt{5}\cdot E\left(225^\circ\right)=-\dfrac{\sqrt{10}}{2}-\dfrac{\sqrt{10}}{2}i$

2. Schulaufgabe aus der Mathematik * Klasse 11a * 14.01.2009 * Gruppe B * Lösung

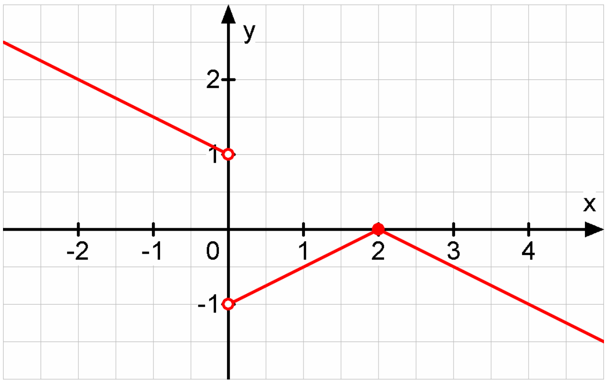
1\. a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-3x-4}{2x-8} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(x-4)\cdot(x+1)}{2\cdot(x-4)} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{4+1}{2} = 2{,}5$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin(5x)}{4x+3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5\cdot 2\cdot \sin(5x)}{5\cdot x\cdot(4+3x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)}{5x}\cdot\dfrac{5\cdot 2}{4+3x} = 1\cdot\dfrac{10}{4+0} = 2{,}5$

c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{|2+2x|}{x+x^2} = \lim\limits_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} -1} \dfrac{\pm 2\cdot(1+x)}{x\cdot(1+x)} = \lim\limits_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} -1} \dfrac{\pm 2}{x} = \dfrac{\pm 2}{-1} = \mp 2$ Der Grenzwert selbst existiert nicht!

2\. a) $f(x) = \dfrac{-0{,}5x^2+x}{|x|}\cdot \operatorname{sgn}(x-2) = \begin{cases} -0{,}5x+1 & ; \quad 2 < x \\ 0 & ; \quad x = 2 \\ 0{,}5x-1 & ; \quad 0 < x < 2 \\ -0{,}5x+1 & ; \quad x < 0 \end{cases}$

b)



Die Funktion ist an jeder Stelle des Definitionsbereichs stetig und damit stetig!

Eine stetige Fortsetzung von f ist an der Stelle $x_1 = 0$ nicht möglich, denn $-1 = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} f(x) = 1$

3\. $f(x) = \begin{cases} bx^2 - ax & ; \quad x < -1 \\ 2x - a + 1 & ; \quad -1 \le x < 2 \\ ax^2 - bx + 6 & ; \quad 2 \le x \end{cases}$

Stetigkeit bei $x_1 = -1$: (1) $b + a = -2 - a + 1 \Rightarrow b = -1 - 2a$ in (2)

Stetigkeit bei $x_2 = 2$: (2) $4 - a + 1 = 4a - 2b + 6 \Rightarrow 2b = 5a + 1$

$-2 - 4a = 5a + 1 \Rightarrow -3 = 9a \Rightarrow a = -\dfrac{1}{3}$

und $b = -1 + \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{3}$

4\. $z^2 + 6iz = 9 + 2i \Leftrightarrow (z+3i)^2 - (3i)^2 = 9+2i \Leftrightarrow (z+3i)^2 = 2i$ Substitution $z+3i = x+iy$

$\Rightarrow$ (1) $x^2 - y^2 = 0$ und (2) $2xy = 2 \Rightarrow y = \dfrac{1}{x}$ in (1)

$\Rightarrow x^2 - \dfrac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 1$ und $y_{1/2} = \pm 1 \Rightarrow$

$z_{1/2} + 3i = \pm 1 \pm i \Rightarrow z_1 = 1 - 2i$ und $z_2 = -1 - 4i$

5\. a) $z^4 = -9$ hat in R keine und in C genau vier verschiedene Lösungen.

b) $z_n = \sqrt[4]{9}\cdot E\left(\dfrac{180^\circ}{4} + n\cdot\dfrac{360^\circ}{4}\right)$ mit $n = 0, 1, 2, 3$. Die gesuchte Lösung mit negativem

Real- und Imaginärteil ergibt sich für $n = 2$ zu $z_2 = \sqrt{3}\cdot E(225^\circ) = -\dfrac{\sqrt{6}}{2} - \dfrac{\sqrt{6}}{2}i$