

Quadratische Gleichungen für die Jahrgangsstufe 9

Die meisten der folgenden Gleichungen lassen sich auf quadratische Gleichungen zurückführen. Bestimme jeweils die Lösungsmenge!

(Bei zwei Gleichungen sieht man die Lösungen ohne lange Rechnung!)

Gib die Lösungen zuerst exakt und – falls sie irrational sind – mit dem Taschenrechner auf Hundertstel gerundet an.

Beachte:

Forme erst in die Normalform $ax^2 + bx + c = 0$ um und wende dann gegebenenfalls die

Mitternachtsformel an:
$$x_{1/2} = \frac{1}{2a} \cdot \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c} \right)$$

1. $2x^2 - 5 = x$

2. $(2x-3)^2 - 4 = 5x$

3. $\frac{2x}{3} - \frac{3}{2x} = 32$

4. $(x-3)^2 - (x-3) = (x+3)^2$

5. $2x^2 + 3x + 4 = (x+2)^2$

6. $\frac{1}{x} - \frac{2}{3} = \frac{4}{x}$

7. $(2x-3) \cdot (4x+5) = 0$

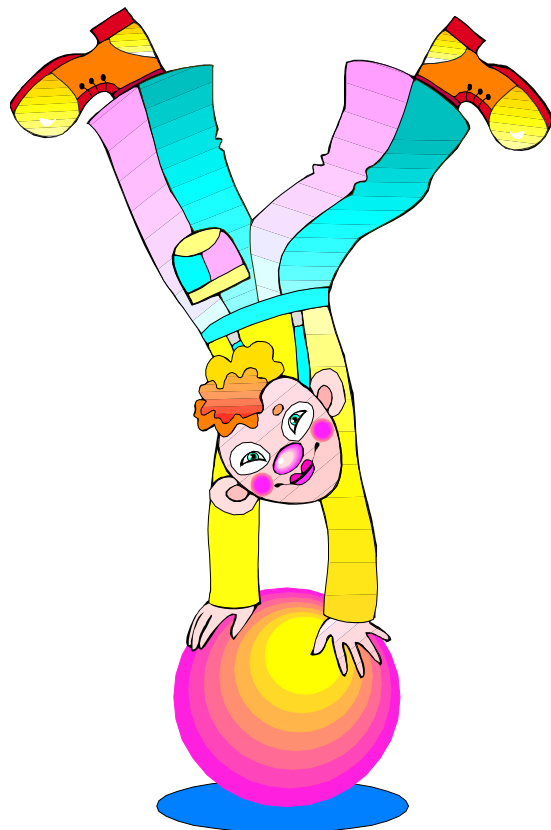
8. $(2x-3) \cdot (4x+5) = 6$

9. $x^4 - x^2 = 12$

10. $2x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

11. $4x^3 - \sqrt{2} \cdot x = 0$

12. $\frac{1}{2+x} - \frac{3}{4-x} = 5$



Lösungen:

1. $2x^2 - 5 = x \Leftrightarrow 2x^2 - x - 5 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{1}{4} \left(1 \pm \sqrt{1+40} \right) = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{41}}{4}$
 $x_1 \approx 1,85$; $x_2 \approx -1,35$

2. $(2x-3)^2 - 4 = 5x \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 - 4 - 5x = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 17x + 5 = 0$
 $x_{1/2} = \frac{1}{8} \cdot \left(17 \pm \sqrt{209} \right)$; $x_1 \approx 3,93$; $x_2 \approx 0,32$

3. $\frac{2x}{3} - \frac{3}{2x} = 32 \mid \cdot 6x \Leftrightarrow 4x^2 - 9 = 192x \Leftrightarrow 4x^2 - 192x - 9 = 0 \Leftrightarrow$
 $x_{1/2} = \frac{1}{8} \cdot \left(192 \pm \sqrt{37008} \right) = 24 \pm \frac{3}{2} \cdot \sqrt{257}$; $x_1 \approx 48,05$; $x_2 \approx -0,05$

4. $(x-3)^2 - (x-3) = (x+3)^2 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow 13x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{13}$
Dies ist keine quadratische Gleichung!

5. $2x^2 + 3x + 4 = (x+2)^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x-1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$; $x_2 = 1$

6. $\frac{1}{x} - \frac{2}{3} = \frac{4}{x} \mid \cdot 3x \Leftrightarrow 3 - 2x = 12 \Leftrightarrow x = -4,5$ (*keine quadratische Gleichung!*)

7. $(2x-3) \cdot (4x+5) = 0 \Leftrightarrow 2x-3=0$ oder $4x+5=0 \Leftrightarrow x_1 = 1,5$; $x_2 = -1,25$

8. $(2x-3) \cdot (4x+5) = 6 \Leftrightarrow 8x^2 - 2x - 15 = 6 \Leftrightarrow 8x^2 - 2x - 21 = 0 \Leftrightarrow$
 $x_{1/2} = \frac{1}{16} \cdot \left(2 \pm \sqrt{676} \right) = \frac{1}{8} \cdot (1 \pm 13)$; $x_1 = 1,75$; $x_2 = -1,5$

9. $x^4 - x^2 = 12$ mit $u = x^2 \Leftrightarrow u^2 - u - 12 = 0 \Leftrightarrow (u-4) \cdot (u+3) = 0 \Leftrightarrow u_1 = 4$; $u_2 = -3$
 $x^2 = 4$ hat die Lösungen $x_{1/2} = \pm 2$; $x^2 = -3$ hat keine Lösung!

10. $2x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ mit $x^2 = u \Leftrightarrow 2u^2 - 3u - 4 = 0 \Leftrightarrow u_{1/2} = \frac{1}{4} \cdot \left(3 \pm \sqrt{41} \right)$
nur zu $u_1 > 0$ gibt es für $x^2 = u$ Lösungen: $x_{1/2} = \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{41}} \approx \pm 1,53$

11. $4x^3 - \sqrt{2} \cdot x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (4x^2 - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$; $x_{2/3} = \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}} \approx \pm 0,59$

Das ist keine quadratische Gleichung sondern eine Gleichung dritten Grades (wegen x^3)!

12. $\frac{1}{2+x} - \frac{3}{4-x} = 5 \mid \cdot (2+x) \cdot (4-x) \Leftrightarrow (4-x) - 3 \cdot (2+x) = 5 \cdot (8+2x-x^2) \Leftrightarrow$
 $5x^2 - 14x - 42 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{1}{10} \cdot \left(14 \pm \sqrt{1036} \right) = \frac{7}{5} \pm \frac{\sqrt{259}}{5} \Leftrightarrow x_1 \approx 4,62$; $x_2 \approx -1,82$