

## Physik \* Jahrgangsstufe 11 \* Differentialrechnung in der Physik

Für die Geschwindigkeit  $v$  eines Körpers gilt:  $v(t_o) \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_o}{t_1 - t_o}$

Mit mathematischer Grenzwertbildung folgt:  $v(t_o) = \lim_{t_1 \rightarrow t_o} \frac{x_1 - x_o}{t_1 - t_o} = \frac{dx}{dt}(t_o) = \dot{x}(t_o)$

$\dot{x}(t_o)$  gibt dabei die Ableitung der Orts-Funktion  $x = x(t)$  nach der Zeit  $t$  an.

Entsprechend gilt für die Beschleunigung  $a$  dieses Körpers:

$a(t_o) \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_1 - v_o}{t_1 - t_o}$  und damit  $a(t_o) = \lim_{t_1 \rightarrow t_o} \frac{v_1 - v_o}{t_1 - t_o} = \frac{dv}{dt}(t_o) = \dot{v}(t_o) = \ddot{x}(t_o)$

$\ddot{x}(t_o)$  gibt dabei die zweite Ableitung der Orts-Funktion  $x = x(t)$  an.

Mit dem zweiten Newtonschen Gesetz gilt also:  $F(t) = m \cdot a(t) = m \cdot \dot{v}(t) = m \cdot \ddot{x}(t)$

Bei krummlinigen Bewegungen überlagern sich die Bewegungen in x- bzw. y-Richtung ohne sich wechselseitig zu stören.

Oft gibt man  $x = x(t)$  und  $y = y(t)$  nicht getrennt sondern mit dem so genannten

Ortsvektor  $\vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  gemeinsam an.

Der Ortsvektor zeigt zu jedem Zeitpunkt zu dem Ort (x/y), an dem sich der Körper befindet.

Der zugehörige Geschwindigkeits- bzw. Beschleunigungsvektor lautet dann:

$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix}$  bzw.  $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{pmatrix}$ .

$\vec{v}(t)$  und  $\vec{a}(t)$  geben dann zu jedem Zeitpunkt Richtung und Betrag der Geschwindigkeit bzw. der Beschleunigung an.

### Aufgaben:

1. a) Begründen Sie, dass für eine Bewegung (in x-Richtung) mit der konstanten Beschleunigung  $a$  (in x-Richtung) die Ortsfunktion  $x = x(t)$  folgendermaßen lautet:

$$x = x(t) = x_o + v_o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2. \quad \text{Welche Bedeutung haben dabei } x_o \text{ und } v_o \text{ ?}$$

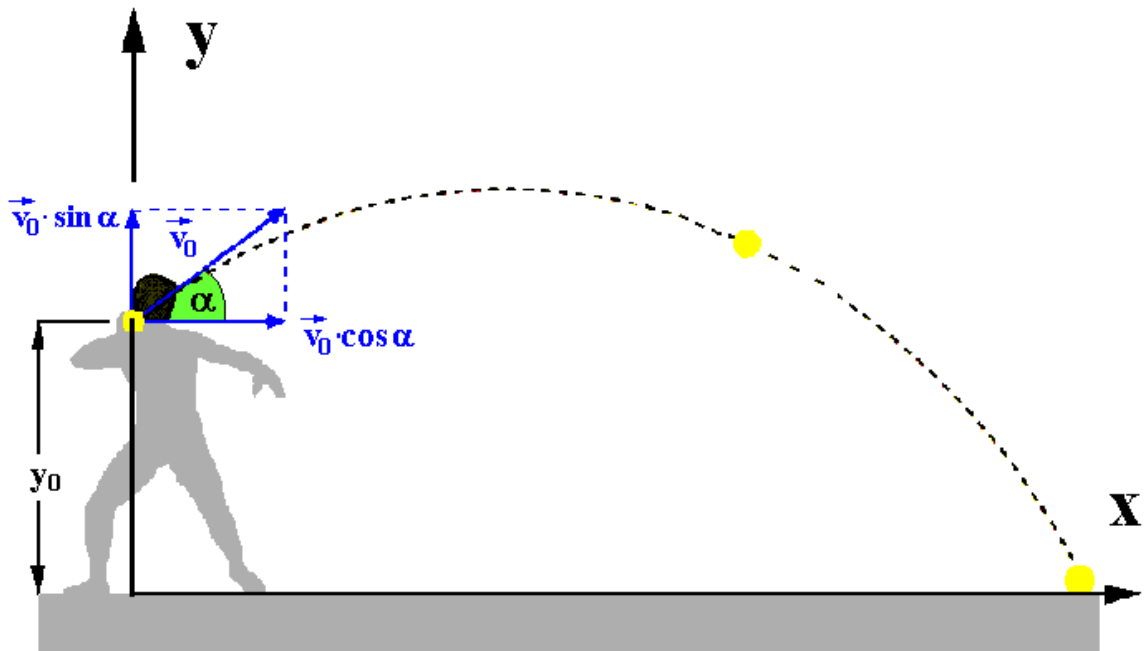
- b) Ein Ball der Masse 500g wird mit der Anfangsgeschwindigkeit  $15 \text{ ms}^{-1}$  nach oben geworfen. Welche Höhe und Geschwindigkeit hat der Ball nach 1,0s ? Welche maximale Höhe erreicht er und wann schlägt er wieder am Boden auf? ( $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ )
- c) Ein Ball der Masse 500g wird mit der Anfangsgeschwindigkeit  $15 \text{ ms}^{-1}$  waagrecht aus einer Höhe von 20m über dem Boden abgeworfen. Welche Höhe und Geschwindigkeit hat der Ball nach 1,0s ? Wo schlägt der Körper wann mit welcher Geschwindigkeit auf? Welche Bahnkurve beschreibt der Ball?

2. Welche Bewegung wird durch den folgenden Ortsvektor  $\vec{r}(t)$  beschrieben?

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{ox} \cdot t \\ h + v_{oy} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{pmatrix} \quad (\text{Welche Bedeutung haben } h, v_{ox} \text{ und } v_{oy} ?)$$

Berechnen Sie  $\vec{v}(t)$  und  $\vec{a}(t)$ . Unter welchem Winkel zur Waagrechten und mit welcher Geschwindigkeit startet der Körper zum Zeitpunkt  $t = 0$  ?

3. Das Bild zeigt einen Kugelstoßer, der die Kugel mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  unter dem Winkel  $\alpha$  (relativ zur Waagrechten) aus der Ausgangshöhe  $y_0$  wegstößt.



Erstellen Sie den zugehörigen Ortsvektor  $\vec{r}(t)$ , den Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}(t)$  und den Beschleunigungsvektor  $\vec{a}(t)$ .

Wie kann man mit Hilfe dieser Vektoren

- die „Wurfweite“
- die größte Höhe der Kugel
- die Auftreffgeschwindigkeit der Kugel am Boden ermitteln?

4. Die Auslenkung  $y$  eines Federpendels, das mit der Amplitude  $A = 5,0\text{cm}$  und der Schwingungsdauer  $T = 3,0\text{s}$  schwingt, lautet

$$y(t) = 5,0\text{cm} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3,0\text{s}} \cdot t\right).$$

- Bestimmen Sie die maximale Geschwindigkeit nach „oben“. Wann tritt diese Geschwindigkeit jeweils auf?
- Bestimmen Sie zum Zeitpunkt  $t_1 = 2,6\text{s}$  die Auslenkung  $y(t_1)$ , die Geschwindigkeit  $v(t_1)$  und die Beschleunigung  $a(t_1)$ .
- Welche maximale Beschleunigung erfährt der Pendelkörper?  
Bei welcher Auslenkung tritt diese maximale Beschleunigung auf?